Exercices sur le conditionnement : corrigé

ECE1 Lycée Kastler

24 mars 2008

Exercice 1 (*)

Pour bien comprendre comment ça se passe le mieux est de commencer par retraduire clairement l'énoncé en utilisant les notations ensemblistes vues en cours. Notons ici A l'événement « être malade » et B l'événement « être testé positif ». L'énoncé nous donne les probabilités suivantes : $P(A) = 0.001$; $P_A(B) = 0.95$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0.005$. On peut calculer la probabilité de B en utilisant la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0.001 \times 0.95 + (1 - 0.001) \times 0.005 = 0.005945$. La probabilité qui nous est demandée est $P_B(A)$, qui va être obtenue par la formule de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \dfrac{0.95 \times 0.001}{0.005945} \simeq 0.16$. Cette valeur peut sembler faible au premier abord, mais elle est tout à fait normale. Presque tous les malades sont testés positifs, mais pour chaque personne malade il y a à peu près 1 000 personnes saines, dont 5 en moyenne vont être testées positives. Il n'y a donc qu'environ une chance sur six qu'une personne testée positive soit effectivement malade.

Exercice 2 (**)

L'univers est contitué des $\dbinom{32}{5}$ tirages possibles de 5 cartes parmi 32. Notons A l'événement « tirer quatre As ». On a $|A| = 28$ (on tire 4 As parmi les quatre disponibles et une cinquième carte parmi les 28 qui restent) donc $P(A) = \dfrac{28}{\binom{32}{5}} \simeq 0.00014$. Notons maintenant B : « on tire au moins deux As ». La deuxième question nous demande de calculer $P_B(A)$. Il faut donc calculer $P(B)$. On a $|B| = \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28$ (on a séparé selon que le joueur tirait exactement deux As, trois As ou les quatre As), donc $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{28}{\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28} \simeq 0.0013$. En comparaison, la probabilité d'obtenir deux As en tirant trois cartes dans un jeu de 32 vaut $\dfrac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{1}}{\binom{32}{3}} \simeq 0.033$, elle est beaucoup plus élevée ! C'est tout à fait normal, car le joueur qui montre deux As a pu les choisir parmi les cinq cartes de son jeu, ce qui fait que tous les tirages de cinq cartes contenant deux As au moins permettent d'en étaler deux sur la table.

Exercice 3 (*)

Notons S l'évènement « L'individu est sans opinion » ; P : « Il est favorable à la paix » et G : « Il est favorable à la guerre ». On notera également A et B les évènements correspondant à l'appartenance à l'un des deux pays.

1. C'est une simple application de la formule des probabilités totales : $P_A(S) = 1 - P_A(G) - P_A(P) = 1 - 0.16 - 0.6 = 0.24$, et de même $P_B(S) = 0.2$, donc $P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) = 0.5 \times 0.24 + 0.5 \times 0.2 = 0.22$.

2. C'est cette fois-ci la formule de Bayes qui va être utile : $P(G) = P(A)\times P_A(G)+P(B)\times P_B(G) = 0.5\times 0.16+0.5\times 0.68 = 0.42$, donc $P_G(A) = \dfrac{P(A)\times P_A(G)}{P(G)} = \dfrac{0.5\times 0.16}{0.42} \simeq 0.19$ (la probabilité de G ayant été calculée comme au-dessus à l'aide des probabilités totales)
3. Même chose qu'au-dessus : $P(P) = 0.5\times 0.6+0.5\times 0.12 = 0.36$, donc $P_P(A) = \dfrac{P(A)\times P_A(P)}{P(P)} = \dfrac{0.5\times 0.6}{0.36} \simeq 0.83$.

Exercice 4 (***)

Il faut utiliser la formule des probabilités totales : pour chaque entier k, on a une chance sur n de tirer l'urne numéro k, et une fois cette urne choisie, la probabilité de tirer deux boules rouges à l'intérieur vaut $\dfrac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}}$ (n boules au total, donc $\dbinom{n}{2}$ tirages possibles, dont $\dbinom{n-k}{2}$ où l'on tire deux boules rouges). On a donc une probabilité totale de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n^2(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k}{2}$. Or, en faisant le changement de variable $k \to n-k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k}{2} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}k(k-1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(k^2-k) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} - \frac{(n-1)n}{4}$. La probabilité recherchée vaut donc $\dfrac{2n-1}{6n} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{2n-4}{6n}$. Plus intéressant, la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette probabilité vaut $\dfrac{1}{3}$. Autrement dit, quand n devient grand, on se rapproche d'une situation où obtenir deux boules rouges, deux blanches ou une de chaque couleur est équiprobable.

Si le tirage s'effectue avec remise, la probabilité d'obtenir deux boules rouges lorsqu'on tire dans l'urne numéro k vaut désormais $\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^2$, soit une probabilité totale de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n^2+k^2-2nk) = \frac{1}{n^3}\left(n^3+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2(n+1)\right) = 1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)-6n}{6n^2} = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$. Cette probabilité a également pour limite $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 5 (**)

Notons T l'évènement « On lance un dé truqué » et N : « On lance un dé normal ». D'après l'énoncé, on a $P(T) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$ et $P(N) = \dfrac{4}{5}$. De plus, $P_T(6) = \dfrac{1}{2}$ et $P_T(1) = P_T(2) = P_T(3) = P_T(4) = P_T(5) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{10}$.

1. Probabilités totales : $P(6) = P(N)\times P_N(6) + P(T)\times P_T(6) = \dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{30} \simeq 0.23$.
2. Formule de Bayes : $P_6(T) = \dfrac{P(T)\times P_T(6)}{P(6)} = \dfrac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{7}{30}} = \dfrac{3}{7} \simeq 0.42$.
3. Probabilités totales puis Bayes : $P(2) = P(N)\times P_N(2)+P(T)\times P_T(2) = \dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{10} = \dfrac{23}{150}$
$P_2(N) = \dfrac{P(N)\times P_N(2)}{P(2)} = \dfrac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}}{\frac{23}{150}} = \dfrac{20}{23} \simeq 0.87$ (pour calculer la probabilité d'obtenir un 2, on a

utilisé les probabilités totales).

Exercice 6 (**)

Il s'agit une fois de plus d'une combinaison de probabilités totales et de formule de Bayes. Notons A : « On tire dans la première urne » et B : « On tire deux boules rouges ». On a $P(A) = \frac{1}{2}$; $P_A(B) = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{12}$. On en déduit dans un premier temps $P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$, puis $P_B(A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{6}$.

Dans le cas où on effectue une remise, le raisonnement est le même mais, en gardant les mêmes notations, $P_B(A) = \frac{6}{9} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$. On en déduit dans un premier temps $P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$, puis $P_B(A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{5}{18}} = \frac{4}{5}$. La probabilité est légèrement plus faible que dans le cas du tirage avec remise.

Exercice 7 (**)

Commençons par traduire les hypothèses de l'énoncé : au jour 0, la place n'est pas réservée, donc $p_0 = 1$. Ensuite, en notant A_n l'évènement « La place est réservée au jour n », l'énoncé stipule que $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{9}{10}$ et $P_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{4}{10}$. La formule des probabilités totales donne alors la formule de récurrence : $p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A_n}) \times P_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{9}{10} \times p_n + \frac{4}{10} \times (1 - p_n) = 0.5p_n + 0.4$. La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation caractéristique $x = 0.5x + 0.4$, ce qui donne $x = 0.8$. On introduit la suite auxiliaire $b_n = p_n - 0.8$, qui vérifie $b_{n+1} = p_{n+1} - 0.8 = 0.5p_n + 0.4 - 0.8 = 0.5(p_n - 0.8) = 0.5b_n$. La suite (b_n) est donc géométrique de raison 0.8 et de premier terme $b_0 = -0.8$, donc $b_n = -0.8 \times (0.5)^n$ et $p_n = b_n + 0.8 = 0.8 \times (1 - 0.5^n)$. On constate que la limite de la suite p_n vaut 0.8 et que la suite est croissante, c'est-à-dire que la proportion de places réservées dans l'avion va augmenter, mais en ne dépassant pas un plafond de 80%.

Exercice 8 (***)

1. Un petit schéma peut aider, mais n'est pas obligatoire. On a bien sûr $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$ puisque la guêpe se trouve dans la pièce A au départ. Ensuite, on utilise l'énoncé, on a donc $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ et $c_1 = 0$. Pour l'étape suivante, il faut utiliser la formule des probabilités totales : $a_2 = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) + P(C_1) \times P_{C_1}(A_2) = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$; de même, $b_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$; enfin $c_2 = \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6}$ (on note que $a_2 + b_2 + c_2 = \frac{5}{18} + \frac{5}{9} + \frac{1}{6} = 1$, ce qui est plutôt rassurant).
2. Il s'agit d'une simple généralisation du cas précédent utilisant toujours les probabilités totales : $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$; $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + c_n$.
3. Pour montrer que u_n est constante, le pus simple est de calculer u_{n+1}. On a $u_{n+1} = \frac{6}{10}a_{n+1} - \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{6}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n - \frac{2}{10}a_n - \frac{3}{20}b_n = 0$. La suite u_n est donc nulle (au moins à partir de $n = 1$).

4. Tentons d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. On a $v_{n+1} = \frac{4}{10}a_{n+1} + \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{4}{30}a_n + \frac{1}{10}b_n + \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n = \frac{5}{6}\left(\frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n\right)$. La suite v_n est donc géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $v_0 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, donc $v_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
5. On constate que $u_n + v_n = a_n$, donc $a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et, comme $u_n = 0$, $b_n = 2a_n = \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
6. On a bien entendu $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - 3a_n = 1 - \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Cette probabilité tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 9 (***)

Le nombre de jetons dans la poignée tirée peut varier entre 0 et n. Notons donc, $\forall i \in \{0; 1; \dots; n\}$, A_i l'évènement « On a tiré une poignée contenant i jetons ». L'énoncé stipule que ces évènements sont équiprobables, autrement dit que $P(A_i) = \frac{1}{n+1}$. On notera par ailleurs simplement 1 l'évènement « On tire le jeton numéro 1 ». On a $P_{A_i}(1) = \frac{i}{n}$ (si on tire une poignée de i jetons et qu'il y en a n au total, on a i chances sur n qu'un jeton précis soit tiré ; si vous n'êtes pas convaincus, on peut aussi dire que $|A_i| = \binom{n}{i}$ et $|A_i \cap B| = \binom{n-1}{i-1}$ puisqu'une fois choisi le jeton 1, il reste $i-1$ jetons à tirer parmi les $n-1$ restants dans l'urne, donc $P_{A_i}(1) = \frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \times \frac{i!(n-i)!}{n!} = \frac{i}{n}$). Les évènements A_i formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $P(1) = \sum_{i=0}^{i=n} P(A_i) \times P_{A_i}(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$. Ce résultat est en fait assez prévisible : si tous les nombres de jetons possibles sont équiprobables, on tirera en moyenne la moitié des jetons, et on donc autant de chances de tirer le numéro 1 que de ne pas le tirer.

On a bien sûr de même $P(2) = \frac{1}{2}$. Pour déterminer si le tirage des jetons 1 et 2 est indépendant, le plus simple est de calculer $P(1 \cap 2)$ et de regarder si on obtient la même valeur qu'en faisant $P(1) \times P(2)$. Le calcul de $P(1 \cap 2)$ est très similaire à celui effectué ci-dessus : $|A_i \cap 1 \cap 2| = \binom{n-2}{i-2}$, donc $P_{A_i}(1 \cap 2) = \frac{\binom{n-2}{i-2}}{\binom{n}{i}} = \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} \times \frac{i!(n-i)!}{n!} = \frac{i(i-1)}{n(n-1)}$. On applique ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir $P(1 \cap 2) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i^2 - i = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2n+1-3}{6(n-1)} = \frac{1}{3}$. Cette probabilité étant différente de $P(1) \times P(2) = \frac{1}{4}$, les deux évènements ne sont pas indépendents. Autre façon de voir les choses : $P_1(2) = \frac{P(1 \cap 2)}{P(1)} = \frac{2}{3}$. On peut interpréter ce résultat ainsi : si le jeton 1 a été tiré, il est plus probable qu'on ait tiré une grosse poignée qu'une petite poignée, ce qui augmente nettement la probabilité que le jeton 2 ait également été tiré (mais pour être tout à fait honnête, ce résultats n'était pas évident à prévoir).

Dans le cas où ce sont les poignées qui sont équiréparties, comme il existe 2^n poignées (autant que de sous-ensemble de l'ensemble des n jetons placés dans l'urne, chaque poignée a une probabilité 2^n d'être tirée. Comme il existe $\binom{n}{i}$ poignées contenant i jetons, on a donc $P(A_i) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$. On peut alors effectuer le même type de calcul que précédemment à l'aide des probabilités totales (la probabilité conditionnelle $P_{A_i}(1)$ n'a pas de raison d'avoir changé) : $P(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{i} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{i=n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{i=n}\binom{n-1}{i-1} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0} i = n-1\binom{n-1}{i} = \frac{1}{2^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}$. On a utilisé vers la fin de calcul le fait que $\sum_{i=0} i = p\binom{p}{i} = 2^p$, qui est un résultat classique. On retrouve donc la même probabilité que tout à l'heure, ce qui est en fait normal si on se souvient que les coefficients binomiaux ont une propriété de symétrie : on a autant de chances de tirer une poignée à 0 éléments qu'une poignée à n éléments, une poignée à 1 élément qu'une à $n-1$ éléments etc, ce qui donnera toujours en moyenne une chance sur deux de tirer un jeton donné.

Comme tout à l'heure, on aura donc $P(1) \times P(2) = \frac{1}{4}$, et on cherche à calculer $P(1 \cap 2)$, toujours avec les probabilités totales en utilisant le système complet d'évènements A_i : $P(1 \cap 2) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{i=n}\frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=2}^{i=n}\frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=2}^{i=n}\binom{n-2}{i-2} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n-2}{i} = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$. Cette fois-ci, les deux évènements sont indépendants. Comme j'en entends déjà qui se demandent « Mais pourquoi l'argument donné tout l'heure pour justifier que les évènements n'étaient pas indépendants ne serait-il plus valable dans ce cas ? », j'essaie de leur répondre : ici, la probabilité de tirer un certain nombre de jetons est fortement pondéré par le nombre de poignées contenant ce nombre de jetons. Ainsi, si on sait qu'on a tiré le jeton 1, on sait simplement que la poignée choisie fait partie de la moitié des poingées qui contiennent le jeton 1. Mais parmi celles-ci, il y en a exactement la moitié qui contiennent le jeton 2 et la moitié qui ne le contiennent pas ! En effet, parmi les sous-ensembles contenant le jeton 1, il y en a autant qui contiennent le jeton 2 et qui ne le contiennent pas, et contrairement à tout à l'heure on affecte la même probabilité à chacune.