

# Feuille d'exercices n°17 : Conditionnement

ECE3 Lycée Carnot

29 janvier 2010

## Exercice 1 (\*)

Un classique : une maladie rare touche un individu sur 1 000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.5% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ?

## Exercice 2 (\*\*)

On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir les quatre As ? Un joueur dévoile deux cartes de son jeu, qui sont des As. Quelle est maintenant la probabilité qu'il détienne quatre As ? Comparer avec la probabilité d'avoir deux As quand on tire 3 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Interpréter.

## Exercice 3 (\*)

Une guerre sévit depuis des années entre deux pays voisins. Les habitants du pays  $A$  sont à 60% favorables à la paix et à 16% favorables à la guerre (le reste étant sans opinion) ; par contre dans le pays  $B$ , 68% des habitants sont pour la guerre et 12% sont pour la paix. On rencontre un individu sans savoir quel pays il habite (une chance sur deux pour chaque).

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. Il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il habite le pays  $A$  ?
3. Même question s'il est favorable à la paix.

## Exercice 4 (\*\*\*)

On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ . Dans l'urne numéro  $k$  se trouvent  $k$  boules blanches et  $n - k$  rouges. On choisit au hasard une urne puis on tire deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Même question si on tire successivement les deux boules avec remise. Quelles sont les limites de ces probabilités quand  $n$  tend vers l'infini ?

## Exercice 5 (\*\*)

Dans un lot de 100 dés à 6 faces, 20 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
3. On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

## Exercice 6 (\*\*)

On dispose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges. On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ? Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

## Exercice 7 (\*\*)

Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour  $n$ , il y a une probabilité  $\frac{4}{10}$  que quelqu'un la réserve au jour  $n + 1$ . Par contre, si elle est réservée au jour  $n$ , elle reste réservée au jour  $n + 1$  avec probabilité  $\frac{9}{10}$ . On note  $p_n$  la probabilité que la place soit réservée au jour  $n$ . Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$  et en déduire  $p_n$ , puis sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Exercice 8 (\*\*\*)

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces  $A$  et  $B$ . Elle est dans la pièce  $A$  à  $t = 0$ , et évolue ainsi : si elle est en  $A$  à l'instant  $n$ , elle reste en  $A$  avec probabilité  $\frac{1}{3}$  ou passe en  $B$  avec probabilité  $\frac{2}{3}$  à l'instant  $n + 1$  ; si elle est en  $B$ , elle retourne en  $A$  avec probabilité  $\frac{1}{4}$ , reste en  $B$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et sort de l'appartement avec probabilité  $\frac{1}{4}$ . Si elle est dehors, elle y reste. On note  $A_n$  : « La guêpe est en  $A$  à l'instant  $n$  ». Je vous laisse deviner ce que représentent  $B_n$  et  $C_n$ . Les probabilités respectives de ces événements sont notées  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

1. Calculer  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$  et  $c_2$ .
2. Exprimer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et de  $b_n$ .
3. Montrer que  $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$  est une suite constante.
4. Montrer que  $u_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$  est une suite géométrique.
5. En déduire les valeurs de  $a_n$  et de  $b_n$ .
6. Que vaut  $c_n$  ?

## Exercice 9 (\*\*\*)

Une urne contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons, et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on eut pioché une poignée vide). Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans notre poignée ? Les événements  $A$  : « On a pioché le jeton 1 » et  $B$  : « On a pioché le jeton 2 » sont-ils indépendants ? Mêmes questions dans le cas où ce n'est plus le nombre de jeton qui est réparti uniformément, mais où on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide) ?