Feuilles d'exercices n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

8 septembre 2009

Exercice 1

- f est constante se traduit par exemple par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = f(y)$; ou par $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$. Notez que $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y)$ marche aussi (alors que ça semble moins fort que la première proposition).
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y > x$, $f(x) < f(y)$.
- tout réel a (au moins) un antécédent par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$.
- f ne prend pas de valeur négative si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ (ça, c'est assez facile !).
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
- f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq f(y)$. On peut également proposer $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 2

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$: FAUX, x^2 est toujours positif, mais pas toujours strictement positif, $x = 0$ est un contre-exemple.
2. $\exists x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 = 12$: VRAI, il suffit de prendre $x = \dfrac{13}{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n = 2p$: FAUX, ce n'est vrai que si n est pair.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p = 3n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 3, et le résultat sera toujours un entier naturel.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) = 2p$: VRAI, cela revient à dire que $n(n+1)$ est toujours pair. En effet, parmi n et $n+1$, l'un des deux nombres est pair et l'autre impair, on obtient donc un nombre pair en faisant leur produit.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y^2$: FAUX, si x est strictement négatif, il n'est supérieur à aucun carré.
7. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$: VRAI, pour le coup, tous les x strictement négatifs sont des exemples.
8. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x > y^2$: FAUX, on a par exemple toujours $x < (x+1)^2$
9. $\forall x > 0$, $\exists y > 0$, $y < x$: VRAI, il suffit de prendre par exemple $y = \dfrac{x}{2}$.
10. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists z \in \mathbb{R}$, $e^y = xz^2$: VRAI, ça parait un peu alambiqué, mais il suffit en fait de prendre $x = 1$, et, quelle que soit la valeur de y, de poser $z = \sqrt{e^y}$.

Exercice 3

C'est très facile si on a compris qu'une négation transformait un quantificateur universel en quantificateur existentiel et vice-versa.

1. $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 \neq 12$

3. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \neq 2p$
4. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \neq 3n$
5. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n(n+1) \neq 2p$
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y^2$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geqslant y^2$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leqslant y^2$
9. $\exists x > 0, \forall y > 0, y \geqslant x$
10. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, e^y \neq xz^2$

Exercice 4

1. $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100} = \dfrac{2^5 \times 5^2 \times 3^{-4} \times 2^2 \times 3^2}{3^8 \times 3 \times 5 \times 2^2 \times 5^2} = \dfrac{2^5}{3^{11} \times 5}$
2. $\ln(96) = \ln(2^5 \times 3) = 5\ln 2 + \ln 3$
3. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{3x}} = e^{x^2-3x} = e^{x(x-3)}$
4. $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}} = \dfrac{3\sqrt{2^3 \times 3^2}}{2\sqrt{2 \times 3^4}} = \dfrac{2 \times 3^2 \times \sqrt{2}}{2 \times 3^2\sqrt{2}} = 1$
5. $e^{-\ln(10)} = \dfrac{1}{e^{\ln 10}} = \dfrac{1}{10}$

Exercice 5

1. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$, donc $\mathcal{S} = \{2; 3\}$.
2. On constate que 1 est racine de ce polynome puisque $2-4+3-1 = 0$. On peut donc factoriser par $x-1$: $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification, on obtient $a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$, donc $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x-1)(2x^2 - 2x + 1)$. Cherchons les racines de ce dernier trinome, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$. Il n'y a donc pas de racines réelles, et concernant l'équation initiale, $\mathcal{S} = \{1\}$.
3. Posons $X = \sqrt{x}$ (en notant au passage que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$). L'équation devient alors $X^2 = X + 2$, soit $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Cette dernière solution est à exclure. Comme on a, par définition de X, $x = X^2$, on obtient donc $\mathcal{S} = \{4\}$.
4. Encore un petit changement de variable : on pose $X = \ln x$ (x doit donc être positif) et on se ramène à l'équation $X^2 - 5X - 12 = 0$, de discriminant $\Delta = 25 + 4 \times 12 = 73$, ayant donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{5+\sqrt{73}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{5-\sqrt{73}}{2}$. Ensuite, on utilise $x = e^X$, donc $\mathcal{S} = \{e^{\frac{5-\sqrt{73}}{2}}; e^{\frac{5+\sqrt{73}}{2}}\}$.
5. Réécrivons l'équation en multipliant les deux membres par e^x (qui est toujours strictement positif, donc ça ne pose pas de problème) : $(e^x)^2 + 1 = 2e^x$, soit en posant $X = e^x$ (X sera donc toujours positif) $X^2 - 2X + 1 = 0$. On reconnait une identité remarquable : $(X-1)^2 = 0$, qui a pour unique solution $X = 1$. Puisque $x = \ln X$, l'équation initiale a donc pour solution $\mathcal{S} = \{0\}$.

6. Un petit travail de réécriture s'impose à nouveau : $\ln((x+3)(x-2)) = \ln(4)$, donc (par exemple en prenant l'exponentielle de chaque membre) $(x+3)(x-2) = 4$, soit $x^2 + x - 10 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1+4\times 10 = 41$, donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}$, et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$. Deux solutions donc ? Pas si vite ! Pour que l'équation initiale ait un sens, il faut absolument avoir $x+3 > 0$ et $x-2 > 0$, c'est-à-dire $x > 2$. La première solution trouvée étant inférieure à 2, on a en fait $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}\right\}$.

7. $x^3 + 5x^2 \leqslant 6x \Leftrightarrow x(x^2+5x-6) \leqslant 0$. Dans le but de faire un tableau de signe, cherchons les racines de la parenthèse, qui a pour discriminant $\Delta = 25+4\times 6 = 49$, donc admet deux racines réelles $x_1 + \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		-6		0		1	
x	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
x^2+5x-6	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
x^3+5x^2-6	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en conclut que $\mathcal{S} = [-6;0] \cup [1;+\infty[$

8. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-(x^2-4)}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4} > 0$. Le dénominateur a pour racines -2 et 2. Quant au numérateur, il a pour discriminant $\Delta = 4+4 = 8$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$. D'où le tableau de signes suivant :

x		-2		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-2x-1}{x^2-4}$	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty;-2[\cup]1-\sqrt{2};2[\cup]1+\sqrt{2};+\infty[$

9. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x-3 > 0$, soit $x > \dfrac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2};4\right[$.

10. Les puissances quelconques n'étant définies que sur $\mathbb{R}_+$, on ne travaille qu'avec des nombres positifs, et on peut passer au ln : $3\times 2^{3x-4} \geqslant 7^8 \Leftrightarrow \ln 3 + (3x-4)\ln 2 \geqslant 8\ln 7$, soit $3x-4 \geqslant \dfrac{8\ln 7 - \ln 3}{\ln 2}$, donc $x \geqslant \dfrac{8\ln 7-\ln 3}{3\ln 2} + \dfrac{4}{3}$, soit $\mathcal{S} = \left[\dfrac{8\ln 7-\ln 3}{3\ln 2} + \dfrac{4}{3};+\infty\right[$.

Exercice 6

- Comme $2 \leqslant 2x \leqslant 8$ et $-15 \leqslant -3y \leqslant -6$, on obtient $-12 \leqslant 2x-3y+1 \leqslant 3$.
- Comme $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $-1 \leqslant y-3 \leqslant 2$, on obtient $-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 8$ (séparez les cas suivant le signe de y si vous n'êtes pas sûrs de vous pour ce genre de cas). On aurait aussi pu dire que $x(y-3) = xy-3x$, or $2 \leqslant xy \leqslant 20$ et $-12 \leqslant -3x \leqslant -4$, mais on obtient alors $-10 \leqslant x(y-3) \leqslant 16$, ce qui est un encadrement nettement moins précis que le précédent.
- Comme $-3 < z < 3$; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{z}{2} < \dfrac{3}{2}$.
- Comme $3 \leqslant 3x \leqslant 12$ et $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{y+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3x}{y+1} \leqslant 4$.

- Comme $-5 < z - 2 < 1$, on obtient $\dfrac{1}{z-2} < -\dfrac{1}{5}$ ou $\dfrac{1}{z-2} > 1$ (on est obligés de distinguer deux cas suivant le signe de z).
- On peut bien sûr encadrer $x^2 - 4x + 4$ terme par terme (ce qui donne finalement $-11 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 16$), mais il est beaucoup plus efficace de constater que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Comme $-1 \leqslant x - 2 \leqslant 2$, on a alors $0 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 4$.
- Comme $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{y-1} \leqslant 1$ et $-7 < z - 4 < -1 \Rightarrow -28 < x(z-1) < -1$, on obtient $-28 < \dfrac{x(z-4)}{y-1} < -\dfrac{1}{4}$.
- On a $2 \leqslant xy \leqslant 20$, donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5}$, et $-1 < 2 - z < 5$, donc $-3e^5 < -3e^{2-z} < -\dfrac{3}{e}$, d'où finalement $\sqrt{2} - 3e^5 < \sqrt{xy} - 3e^{2-z} < 2\sqrt{5} - \dfrac{3}{e}$.