

# Feuilles d'exercices n°1 : Logique et calcul

ECE3 Lycée Carnot

4 septembre 2009

## Logique

### Exercice 1

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs ( $f$  étant une fonction réelle) :

- $f$  est constante
- tout réel a un antécédent par  $f$
- tout réel a (au moins) deux antécédents par  $f$
- $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur
- $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- $f$  ne prend pas de valeur négative

### Exercice 2

Déterminer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (donner un contre-exemple si la proposition est fausse, et justifier si elle est vraie) :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
2.  $\exists x \in \mathbb{R}, 2x - 1 = 12$
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 3n$
5.  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n(n + 1) = 2p$
6.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y^2$
7.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y^2$
8.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y^2$
9.  $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$
10.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, e^y = xz^2$

### Exercice 3

Énoncer la négation de chacune des propositions de l'exercice 2 (avec des quantificateurs, bien entendu).

# Calcul

## Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

1.  $\frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}$
2.  $\ln(96)$
3.  $\frac{e^{x^2}}{e^{3x}}$
4.  $\frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$
5.  $e^{-\ln(10)}$

## Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1.  $x^2 - 5x + 6 = 0$
2.  $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$
3.  $x = \sqrt{x} + 2$
4.  $(\ln x)^2 - 5\ln(x) = 12$
5.  $e^x + e^{-x} = 2$
6.  $\ln(x + 3) + \ln(x - 2) = 2 \ln 2$
7.  $x^3 + 5x^2 \leq 6x$
8.  $\frac{2x - 3}{x^2 - 4} < 1$
9.  $\ln(2x - 3) \leq \ln 5$
10.  $3 \times 2^{3x-4} \geq 7^8$

## Exercice 6

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois réels vérifiant  $x \in [1; 4]$ ;  $2 \leq y \leq 5$  et  $|z| < 3$ . Déterminer un encadrement le plus précis possibles des expressions suivantes :

- $2x - 3y + 1$
- $\frac{z}{2}$
- $\frac{1}{z - 2}$
- $\frac{x(z - 4)}{y - 1}$
- $x(y - 3)$
- $\frac{3x}{y + 1}$
- $x^2 - 4x + 4$
- $\sqrt{xy} - 3e^{2-z}$