

Feuilles d'exercices n°1 : Logique et calcul

ECE3 Lycée Carnot

4 septembre 2009

Logique

Exercice 1

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

- f est constante
- tout réel a un antécédent par f
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f
- f ne prend jamais deux fois la même valeur
- f est strictement croissante sur \mathbb{R}
- f ne prend pas de valeur négative

Exercice 2

Déterminer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (donner un contre-exemple si la proposition est fausse, et justifier si elle est vraie) :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, 2x - 1 = 12$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 3n$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n(n + 1) = 2p$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y^2$
7. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y^2$
8. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y^2$
9. $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$
10. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, e^y = xz^2$

Exercice 3

Énoncer la négation de chacune des propositions de l'exercice 2 (avec des quantificateurs, bien entendu).

Calcul

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}$
2. $\ln(96)$
3. $\frac{e^{x^2}}{e^{3x}}$
4. $\frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$
5. $e^{-\ln(10)}$

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$
3. $x = \sqrt{x} + 2$
4. $(\ln x)^2 - 5\ln(x) = 12$
5. $e^x + e^{-x} = 2$
6. $\ln(x + 3) + \ln(x - 2) = 2 \ln 2$
7. $x^3 + 5x^2 \leq 6x$
8. $\frac{2x - 3}{x^2 - 4} < 1$
9. $\ln(2x - 3) \leq \ln 5$
10. $3 \times 2^{3x-4} \geq 7^8$

Exercice 6

Soient x , y et z trois réels vérifiant $x \in [1; 4]$; $2 \leq y \leq 5$ et $|z| < 3$. Déterminer un encadrement le plus précis possibles des expressions suivantes :

- $2x - 3y + 1$
- $\frac{z}{2}$
- $\frac{1}{z - 2}$
- $\frac{x(z - 4)}{y - 1}$
- $x(y - 3)$
- $\frac{3x}{y + 1}$
- $x^2 - 4x + 4$
- $\sqrt{xy} - 3e^{2-z}$