Feuille d'exercices n°27 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

22 juin 2010

Exercice 1 (*)

L'application u est bien linéaire : si P et Q sont deux polynômes, et (λ, μ) un couple de réels, $u(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q) = \lambda XP' + \mu XQ' - \lambda P - \mu Q = \lambda u(P) + \mu u(Q)$. Son noyau est constitué des polynômes vérifiant $XP' - P$. Comme on est dans $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire $P(X) = aX^2 + bX + c$, donc la condition devient $X(2aX + b) - (aX^2 + bX + c) = 0$, soit $aX^2 + c = 0$. Cela n'est possible que si $a = c = 0$, donc $Ker(u) = \{aX \mid a \in \mathbb{R}\} = Vect(X)$.

Quant à l'image de u, calculons les images par u des éléments de la base canonique : $u(1) = -1$; $u(X) = 0$ et $u(X^2) = 2X^2 - X^2 = X^2$. On en déduit que $Im(u) = Vect(1, X^2)$.

Exercice 2 (**)

Pour la première application, on a comme matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est l'ensemble des solutions du système homogène correspondant $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$. La première équation donne $y = -x$, puis en remplaçant dans la deuxième $-3x + z = 0$, donc $z = 3x$. On a donc $Ker(u) = \{(x, -x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -1, 3))$. Pour obtenir l'image, calculons les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $u(1, 0, 0) = (1, -2)$; $u(0, 1, 0) = (1, 1)$ et $u(0, 0, 1) = (0, 1)$. On a donc $Im(u) = Vect((1, -2); (1, 1); (0, 1))$. Mais cette famille n'est pas libre et par ailleurs engendre $\mathbb{R}^2$ tout entier (en effet, on a par exemple $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$). On a donc en fait $Im(u) = \mathbb{R}^2$.

La matrice de la deuxième application est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est l'ensemble des solutions d'un système qui peut s'écrire sous la forme $y = -x$; $z = -x$ et $z = -y$, donc $x = -x = 0$, puis $y = z = 0$. Le noyau de u est donc réduit au vecteur nul (autrement dit, u est injective). L'image est engendrée par les trois vecteurs $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ et on vérifie facilement que cette famille est libre (le système à résoudre est le même que pour le calcul du noyau). Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$ (puisqu'elle comporte trois élémants), donc $Im(u) = \mathbb{R}^3$ (en fait, u est une application bijective, ce qu'on peut également prouver en constatant que sa matrice est inversible).

Rappelons que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est constituée des polynomes 1, X, X^2 et X^3. On a $u(1) = (1, 1, 1, 1)$; $u(X) = (1, 2, 3, 4)$; $u(X^2) = (1, 4, 9, 16)$ et enfin $u(X^3) = (1, 8, 27, 64)$, donc la matrice de u dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$. Le noyau de u est constitué des polynomes de degré 3 qui s'annulent pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$. Mais un tel polynome, s'il n'est pas nul, se factorise par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$, et doit donc être de degré au moins 4.

On a donc $Ker(u) = \{0\}$. Quand à l'image, elle est engendrée par les quatre vecteurs calculés plus haut. Montrons que la famille est libre : si une combinaison linéaire de ces quatre vecteurs s'annule, cela signifie que le polynome correspondant s'annule en 1, 2, 3 et 4, ce dont on a déjà dit que c'était impossible sauf pour le polynome nul. L'image est donc de dimension 4, donc $Im(u) = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 (*)

La matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifions qu'elle est inversible. Pour cela, on va plutôt résoudre le système formé des deux équations $x + y = a$ et $x - y = b$. En faisant la somme des deux, on obtient $x = \frac{a+b}{2}$, et en faisant la différence $y = \frac{a-b}{2}$. Le système est donc bien de Cramer, et la matrice inverse est $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $f^{-1}(a, b) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 4 (**)

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et $MB = \begin{pmatrix} -a & a-b \\ -c & c-d \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MB = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & b-c \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $a = 0$ et $b = c$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = 0$ et $a = d$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & -b & -2c \\ d & 0 & -f \\ 2g & h & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = c = d = f = g = h = 0$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid a, e, i \in \mathbb{R}^3 \right\}$ $= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Autrement dit, $Ker(u)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $c = f = g =$

$h=0$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid a,b,d,e,i \in \mathbb{R}^5 \right\}$, qu'on peut bien sûr écrire comme d'habitude comme espace vectoriel engendré ici par 5 matrices.

Exercice 5 (*)

Le noyau de p est constitué des solutions du système homogène $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array} \right.$. Les deux équations sont proportionnelles et équivalentes à $x=-2y$, donc $Ker(p) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect((-2,1))$. L'image de p est engendrée par les images de $(1,0)$ et de $(0,1)$, qui valent $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ et $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Ces deux vecteurs étant proportionnels, on a simplement $Im(p) = Vect\left(\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right)$ (ou même $Im(p) = Vect((1,2))$ si on veut faire plus simple). Pour calculer p^2, rien de plus simple : $p(p(x,y)) = \frac{1}{25}(x+2y+2(2x+4y), 2(x+2y)+4(2x+4y)) = \frac{1}{25}(5x+10y, 10x+20y) = \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)$, on a bien $p^2 = p$ (ce qui fait de p ce qu'on appelle en termes techniques un projecteur).

Exercice 6 (**)

1. Par définition, la matrice est constituée des coordonnées données dans l'énoncé disposées en colonnes, elle vaut donc $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Il faut résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \end{array} \right.$

   $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ & & -y & - & 3z & = & 0 \\ & & -5y & - & 15z & = & -10 \end{array} \right.$$

   Les deux dernières équations étant incompatibles, $(-1,1,8)$ nn'a pas d'antécédent par u.

   De même, pour le deuxième vecteur, il faut résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$

   $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ & & -y & - & 3z & = & -1 \\ & & -5y & - & 15z & = & -5 \end{array} \right.$$

   Cette fois-ci, les deux dernières équations sont équivalentes et donnent $y = 1-3z$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $x - 3 + 9z - 7z = -2$, soit $x = 1-2z$. Finalement, les antécédents de $(-2,1,3)$ sont les vecteurs de la forme $(1-2z, 1-3z, z)$, pour une certaine valeur réelle de z.

3. u n'est pas injective ni surjective puisque certains éléments ont une infinité d'antécédents, et d'autres n'en ont pas.

Exercice 7 (*)

Les matrices appartenant au noyau de u sont celles vérifiant $a=c$, $a=b$ et $d=0$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Quant à l'image on l'obtient comme d'habitude en regardant les images des vecteurs de la base canonique : $Im(u) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut constater que les trois premières images ne forment pas une famille libre (leur somme est nul) et pousser un peu les calculs pour obtenir que les matrices appartenant à l'image sont exactement celles vérifiant $c = d$.

Exercice 8 (***)

1. Il s'agit de résoudre le système $AX = 0$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 7z & = & 0 \end{array}\right.$. La somme $L_1 - L_2$ donne $z - 2x = 0$, la combinaison $2L_1 - L_3$ donne $2x - z = 0$. Ces deux équations étant équivalentes, le système n'est pas de Cramer, ses solutions doivent vérifier $z = 2x$ puis, en divisant la première ligne par 4, $4x + y - z = 0$, donc $y = z - 4x = -2x$. Finalement $Ker(u) = \{(x, -2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -2, 2))$.
2. Encore des systèmes à résoudre :
$$u(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow MX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16x & + & 4y & - & 4z & = & x \\ -18x & - & 4y & + & 5z & = & y \\ 30x & + & 8y & - & 7z & = & z \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 15x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 5y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 8z & = & 0 \end{array}\right.$$
Cette fois-ci, les lignes L_1 et L_3 sont manifestement proportionnelles. De plus, $5L_1 + 4L_2$ donne $x = 0$. Les deux premières équations se réduisent alors à $y = z$, ce qui signifie que tous les vecteur de la forme $(0, y, y)$, avec $y \neq 0$, sont vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1.
Même technique pour $u(x, y, z) = 4(x, y, z)$, on se ramène au système homogène suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 12x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 8y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 11z & = & 0 \end{array}\right.$$
La somme $L_2 + L_3$ donne $12x - 6z = 0$, soit $z = 2x$, et la combinaison $L_3 - 2L_1$ donne $6x - 3z = 0$, ce qui est une équation équivalente. Encore une fois, le système n'est pas de Cramer, et en remplaçant dans la première équation on obtient $12x + 4y - 8x = 0$, soit $y = -x$. Finalement, les vecteurs propres sont de la forme $(x, -x, 2x)$, avec $x \neq 0$.
3. On a trouvé trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes (en comptant le noyau calculé à la question précédente, qui correspond à la valeur propre 0). La famille formée de ces trois vecteurs sera une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u sera diagonale. Plus précisément, en posant par exemple $\mathcal{B} = ((1, -2, 2); (0, 1, 1); (1, -1, 2))$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ sera $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
4. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à l'inverser. Pour changer du pivot de Gauss, résolvons le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & & & z & = & a \\ -2x & + & y & - & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 2z & = & c \end{array}\right.$. On a donc $x = a - z$, et en faisant la somme des deux dernières équations $2y + z = b + c$, soit $2y = b + c - z$. En remplaçant dans la dernière équation, $2a - 2z + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{z}{2} + 2z = c$, soit $z = 4a + b - c$; puis

$x = -3a - b + c$ et $y = b + z - 2x = -2a + c$. C'est-à-dire que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (***)

Ce n'est pas si difficile si on comprend bien ce qu'il faut faire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ sera valeur propre pour l'application f si on peut trouver une suite bornée (u_n) non nulle telle que $f(u_n) = \lambda u_n$, c'est-à-dire si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$, ou encore $u_{n+1} = (1+\lambda)u_n$. De telles suites existent bien évidemment, ce sont toutes les suites géométriques de raison $1 + \lambda$. Mais pour que celles-ci (à l'exception de la suite nulle) soient bornées, il faut absolument avoir $|1+\lambda| \leqslant 1$, c'est-à-dire $-1 \leqslant 1+\lambda \leqslant 1$, ou encore $-2 \leqslant \lambda \leqslant 0$. Les valeurs propres de f sont donc tous les nombres réels compris dans l'intervalle $[0; 2]$ (une situation très différente de ce que vous étudierez l'an prochain, où les valeurs propres seront systématiquement en nombre fini.

Exercice 10 (EDHEC 2001) (***)

1. (a) Au vu de la définition de f_a, on a $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$. On calcule sans problème $A_a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Si $A_a X = \lambda X$, on aura $A_a^2 X = \lambda A_a X = \lambda^2 X$. Or $A_a^2 X = 0$ d'après le calcul précédent, donc $\lambda^2 = 0$ et $\lambda = 0$.

   (c) Non, avec une colonne composée de 0, elle ne peut pas être inversible.

2. (a) La famille étant constitué de 3 vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre. Supposons que $\lambda u_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$, alors $\lambda a e_1 + (\lambda + \mu)e_2 + (\nu - \lambda a)e_3 = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) étant supposée être une base, on a alors $\lambda a = \lambda + \mu = \nu - \lambda a = 0$, dont découle facilement $\lambda = \mu = \nu = 0$ (a étant supposé non nul). La famille est donc libre, et constitue une base de E.

   (b) En effet, par linéarité, $f(u_1) = af(e_1) + f(e_2) - af(e_3) = 0$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = u_1$, ce qui correspond bien à la matrice donnée.

3. (a) La matrice de $g \circ g$ dans la base $\mathcal{B}'$ est $M \times M = M^2$, celle de f est K, si les deux applications sont égales, on doit donc avoir $M^2 = K$. On en déduit que $MK = MM^2 = M^3 = M^2 M = KM$.

   (b) Commençons par chercher les matrices commutant avec K : si $M = \begin{pmatrix} b & c & d \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$, alors $KM = \begin{pmatrix} h & i & j \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, l'égalité des deux matrices impose donc $e = h = i = 0$ et $b = j$, soit $M = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & f & g \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. On peut alors calculer $M^2 = \begin{pmatrix} b^2 & bc + cf & 2bd + cg \\ 0 & f^2 & fg + gb \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$. Cette matrice doit être égale à K, ce qui impose $b^2 = f^2 = 0$, donc $b = f = 0$ (ce qui annule deux autres coefficients de la matrice). Il ne reste plus que la condition $cg = 1$, donc $M = \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $cg = 1$, ce qui correspond à la forme de l'énoncé.

4. C'est évident, si la matrice de g ressemble à ceci, son carré est égal à K, donc $g \circ g = f_a$.

Exercice 11 (ESC 2001) (***)

1. (a) La famille étant constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons donc que $a(1,2,1)+b(1,-1,0)+c(1,1,1) = (0,0,0)$. Cela revient à chercher les solutions du système $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$. La différence des deux équations extrêmes donne immédiatement $b = 0$, et on a ensuite $a + c = 2a + c = 0$, dont on déduit que $a = c = 0$, donc la famille est libre, et constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculons donc : $f(v_1) = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(v_1) = v_1$. De même, on obtient $f(v_2) = (0,0,0)$ et $f(v_3) = (-4,-4,-4) = -4v_3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (qui est constituée de vecteurs propres pour f est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   (c) La matrice P étant la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, $P^{-1}AP$ représente la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice calculée à la question précédente, qui coïncide bien avec D.

   (d) Plutôt que de calculer P^{-1} et finir par un produit matriciel, considérons g l'endomrorphisme dont B est la matrice dans la base canonique. On a $g(1,2,1) = (0,0,0)$; $g(1,-1,0) = (4,-4,0) = 4(1,-1,0)$ et $g(1,1,1) = (-4,-4,-4) = -4(1,1,1)$. Les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont donc également vecteurs propres pour g, et la matrice de g dans cette base (qui est égale à $P^{-1}BP$, est donc diagonale (de coefficients diagonaux 0, 4 et -4).

2. (a) Constatons qu'en multipliant à gauche par P, $Y_n = P^{-1}X_n \Leftrightarrow PY_n = X_n$. Il suffit maintenant de vérifier que $P \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_0$, et de même que $P \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = X_1$, ce qui est vrai.

   (b) En effet, $Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = P^{-1}AX_{n+1} + P^{-1}BX_n = DP^{-1}X_{n+1} + \Delta P^{-1}X_n = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

   (c) Le système s'obtient simplement en reprenant les expressions obtenues pour D et Δ. On déduit de la première relation que la suite (u_n) est constante à partir du rang 1, donc $\forall n \geqslant 1$, $u_n = -3$; la suite des termes pairs de (v_n), mais également celle des termes impairs, est géométrique de raison 4. Comme $v_0 = 0$, on aura toujours $v_{2n} = 0$; par contre, $v_{2n+1} = 4^n v_1 = -4^n$. Enfin, la suite (w_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 + 4x + 4 = 0$, soit $(x+2)^2 = 0$, donc $w_n = (\alpha + \beta n) \times (-2)^n$. La condition $w_0 = 1$ impose $\alpha = 2$, et la condition $w_1 = 1$ donne $-2(\alpha + \beta) = 4$, donc $\alpha + \beta = -2$, d'où $\beta = -4$, soit $w_n = (2-4n)(-2)^n$.

   (d) Il ne reste plus qu'à calculer $X_n = PY_n$. Si n est pair (non nul), on obtient $X_n = \begin{pmatrix} -4 + (2-4n)(-2)^n \\ -6 + (2-4n)(-2)^n \\ -3 + (2-4n)(-2)^n \end{pmatrix}$, si n est impair, $X_n = \begin{pmatrix} -3 - 4^{\frac{n-1}{2}} + (2-4n)(-2)^n \\ -6 + 4^{\frac{n-1}{2}} + (2-4n)(-2)^n \\ 3 + (2-4n)(-2)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (EM Lyon 2010) (***)

Partie I

1. On calcule $AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $AG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ puis $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ et $AH = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}_2$ si $b = c$, donc

   $S_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = Vect(F, G, H)$. Les trois matrices formant manifestement une famille libre (une combinaison linéaire des trois aura du mal à s'annuler), c'est une base de S_2, qui est donc de dimension 3.

3. (a) La linéarité est facile à prouver : $A(\lambda S + \mu T)A = \lambda ASA + \mu ATA$. D'après la question précédente, si $S \in \mathcal{S}_2$, $S = \alpha F + \beta G + \gamma H$, donc par linéarité $u(S) = \alpha AFA + \beta AGA + \gamma AHA$. Chacune des trois matrices AFA, AGA et AHA étant symétrique (on les a calculées plus haut), $u(S)$ l'est aussi. L'application u est bien linéaire de $\mathcal{S}_2$ dans lui-même.

   (b) Ah ben, on a déjà tout fait !

   (c) Comme $u(F) = AFA = 4H$; $u(G) = AGA = 4G + 12H$ et $u(H) = AHA = 4A + 6G + 9H$, la matrice recherchée est exactement la matrice M introduite un peu plus loin dans l'énoncé.

Partie II

1. Pour prouver que -4 est valeur propre, il s'agit de résoudre, pour un vecteur-colonne à trois lignes X, le système $MX = -4X$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 4z & = & -4x \\ & & 4y & + & 6z & = & -4y \\ 4x & + & 12y & + & 9z & = & -4z \end{array}\right.$. Via les deux premières équations, $x = -z$ et $y = -\frac{3}{4}z$, et la dernière équation est alors automatiquement vérifiée. Le réel -4 est donc bien valeur propre de v, avec pour vecteurs propres les vecteurs de la forme $\left(-z, -\frac{3}{4}z, z\right)$, avec $z \neq 0$.

   De même, le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 4z & = & x \\ & & 4y & + & 6z & = & y \\ 4x & + & 12y & + & 9z & = & z \end{array}\right.$ donne $x = 4z$ et $y = -2z$, et la dernière équation est alors toujours vérifie, donc 1 est valeur propre, avec des vecteurs propres de la forme $(4z, -2z, z)$, pour $z \neq 0$.

   Enfin, le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 4z & = & 16x \\ & & 4y & + & 6z & = & 16y \\ 4x & + & 12y & + & 9z & = & 16z \end{array}\right.$ donne $z = 4x$ et $z = 2y$, donc $y = 2x$, et encore une fois la dernière équation est alors toujours vérifiée, donc 16 est valeur propre, avec des vecteurs propres de la forme $(x, 2x, 4x)$, $x \neq 0$.

   La matrice de v devient donc par exemple diagonale dans la base suivante : $((4, 3, -4); (4, -2, 1); (1, 2, 4))$.

2. La matrice de passage s'écrit $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice $P^{-1}MP$ est la matrice représentant v dans sa base de vecteurs propres, c'est donc une matrice diagonale de coefficients diagonaux -4, 1 et 16. Autrement dit, $P^{-1}MP = D$.

3. En effet, c'est vrai...

4. Commençons par tout développer dans l'égalité précédente : $D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$. En multipliant l'égalité précédente à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a $PD^3P^{-1} = 13PD^2P^{-1} - 52PDP^{-1} + 64I$. Or, $M = PDP^{-1}$, $M^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et $M^3 = M^2 \times M = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, d'où l'égalité demandée.
5. C'est évident puisque u^3 est représenté dans la base (F, G, H) par M^3, u^2 par M^2 et e par I (ça c'est vrai dans n'importe quelle base).