Feuille d'exercices n°27 : Applications linéaires

ECE3 Lycée Carnot

14 juin 2010

Exercice 1 (*)

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = XP' - P$. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 2 (**)

Donner la matrice (dans les bases canoniques à chaque fois) des applications linéaires suivantes, ainsi que leur noyau et leur image :

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + y, y - 2x + z)$$

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, x + z, y + z)$$

$$u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \quad P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4))$$

Exercice 3 (*)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Montrer que f est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4 (**)

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $u : M \mapsto AM - MB$ ($u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Calculer le noyau de u dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (*)

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $p(x,y) = \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)$. Déterminer le noyau et l'image de p et montrer que $p^2 = p$.

Exercice 6 (**)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $(1,-1,2)$, $(-3,2,-1)$ et $(-7,4,1)$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique, ainsi que l'expression de u.
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1,1,8)$ et de $(-2,1,3)$.
3. u est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 7 (*)

On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & a-b \\ d & d \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 8 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de $Ker(u)$.
2. Montrer que 1 et 4 sont des valeurs propres de u, et déterminer les vecteurs propres correspondants.
3. En déduire que u est diagonalisable, et préciser une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base définie à la question précédente. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Exercice 9 (***)

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées et f l'endomorphisme de E qui, à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer les valeurs propres de f (et les vecteurs propres correspondants).

Exercice 10 (EDHEC 2001) (***)

Soit E un espace vectoriel réel, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit a un réel non nul et f_a l'endomorphisme de E, défini par $f_a(e_2) = 0$, $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$.

1. (a) Ecrire la matrice A_a de f_a dans la base $\mathcal{B}$ et calculer A_a^2.
   (b) Montrer que si $A_a X = \lambda X$, avec $X \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = 0$.
   (c) A_a est-elle inversible ?
2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

(b) Vérifier que la matrice de f_a dans la base $\mathcal{B}'$ est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.

3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathcal{B}'$.

   (a) Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.

   (b) Déduire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.

4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Exercice 11 (ESC 2001) (***)

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.
Soient $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

1. (a) Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (c) Vérifier la relation $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   On note D la matrice diagonale précédente.

   (d) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

2. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$. A cet effet, on définit pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$ En déduire les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

   (d) Donner finalement la matrice X_n , en fonction de n .

Exercice 12 (EM Lyon 2010) (***)

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2.

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_2$.
3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.
   (a) Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}_2$, $u(S) \in \mathcal{S}_2$.
   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
   (c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre 3.

On note désormais : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

1. On note v l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de v et déterminer, pour chacune de celles-ci, les vecteurs propres associés. En déduire une base dans laquelle la matrice de v est diagonale.
2. Déterminer la matrice de passage P entre la base cacnonique et la base construite à la question précédente. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$.
3. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.
4. En déduire que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
5. Établir que $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u est l'application définie dans la première partie.