Sujet d'annales ESSEC 08 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

19 avril 2010

Exercice 1 : probabilités discrètes

A. Modélisation du problème

1. Les évènements A_n, B_n et C_n sont manifestement incompatibles (sauf si une des deux personnes a le don d'uniquité), et P_1 et P_2 ne peuvent pas se trouver à plus de deux routes de distance sur le pentagone. L'un des trois évènements A_n, B_n et C_n est donc nécessairement modifié, et ceux-ci forment un système complet d'évènements.
2. L'énoncé stipulant que P_1 et P_2 se trouvent initialement en S_1 et S_2, c'est-à-dire sur des sites adjacents, $b_0 = 1$ et $a_0 = c_0 = 0$.
3. (a) Supposons donc C_n vérifié, autrement dit que P_1 et P_2 se trouvent à deux routes de distance, par exemple en S_1 et en S_3. Au déplacement suivant, P_1 peut donc se trouver en S_2 ou en S_5, et P_2 en S_2 ou en S_4. Les quatres (deux fois deux) possibilités étant équiprobables, et une seule voyant nos deux personnes aboutir au même endroit, on a bien $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$. Accessoirement, on constate que sur les trois cas restants, un seul amène nos deux compères à des sites adjacents, et deux les laissent à deux routes de distance, donc $P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

   (b) Ca c'est beaucoup plus facile ! L'énoncé stipulant que P_1 et P_2 arrêtent de bouger une fois qu'ils se rencontrent, A_{n+1} sera automatiquement vérifié si A_n l'est, d'où $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ (et donc bien sûr $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$).

   (c) Ne reste plus qu'à supposer B_n réalisé et à voir ce qui se passe. On a alors par exemple P_1 en S_1 et P_2 en S_2, d'où après le déplacement suivant les quatre possibilités (S_5, S_1) ; (S_5, S_3) ; (S_2, S_1) et (S_2, S_3). Dans trois cas les compères sont toujours sur des sites adjacents, dans le dernier ils se retrouvent à deux routes d'écart, donc $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{3}{4}$; $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$, et $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$.
4. Appliquons la formule des probabilités totales au systèmes complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) : $P_{A_{n+1}} = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(A_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) = a_n + \frac{1}{4}c_n$. Les deux autres relations s'obtiennent de façon similaire en exploitant les calculs de probabilités conditionnelles précédents.
5. (a) En décalant la deuxième relation de la question précédente, puis en exploitant la troisième, on obtient $b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n$. Mais, en reprenant une fois de plus la deuxième relation et en la « retournant » un peu, on a $\frac{1}{4}c_n = b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n$, donc en reportant $b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} - \frac{3}{8}b_n = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$.

   (b) La suite (b_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{16} = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} = \frac{5}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$, et ses deux racines sont, sans grande surprise, $\dfrac{\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}}{2}=\alpha$ et $\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}=\beta$.

On peut donc écrire $b_n = w\alpha^n + z\beta^n$, avec $b_0 = 1$, et $b_1 = \dfrac{3}{4}b_0 + \dfrac{1}{4}c_0 = \dfrac{3}{4}$, donc $w+z=1$, ou encore $z = 1-w$; et $w\alpha + z\beta = \dfrac{3}{4}$, soit $w\alpha + (1-w)\beta = \dfrac{3}{4}$, donc $w(\alpha-\beta) = \dfrac{3}{4}-\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{8}$. Comme $\alpha-\beta = \dfrac{-2\sqrt{5}}{8} = -\dfrac{\sqrt{5}}{4}$, on a donc $w = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$; puis $z = 1-w = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$. Finalement, $b_n = \dfrac{1}{5}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$.

(c) En reprenant (et en multipliant par 4) la deuxième relation de la question 4, on obtient $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n = \dfrac{4}{5}(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}) - \dfrac{3}{5}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) = \dfrac{\alpha^n}{5}(4\alpha^2-3\alpha) + \dfrac{\beta^n}{5}(4\beta^2-3\beta)$. Or, en reprenant l'équation caractéristique de (b_n), on a $4\alpha^2 - 3\alpha = 2\alpha - \dfrac{5}{4} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{4} - \dfrac{5}{4} = -\sqrt{5}$; de même $4\beta^2 - 3\beta = 2\beta - \dfrac{5}{4} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{4} - \dfrac{5}{4} = \sqrt{5}$. Finalement, la relation devient donc $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$ comme annoncé dans l'énoncé.

6. (a) En revenant à la toute première question du sujet, la complétude du système d'évènements permet d'affirmer que $a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \dfrac{1}{5}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) - \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$, qu'on peut tenter de simplifier ou non selon son courage (la formule exacte n'a ici que peu d'intérêt, on s'en dispensera donc).

(b) Hormis le 1 initial, (a_n) est une somme de suites géométriques de raison α ou β. Or, $2 < \sqrt{5} < 3$, donc $2 < 5-\sqrt{5} < 5+\sqrt{5} < 8$, ce qui suffit à constater que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(c) Notons D l'évènement « Les deux personnes ne se rencontrent jamais ». On a donc $\bar{D} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Cette union est formée d'une suite croissante d'évènements (cf question 3.b), donc par théorème de la limite monotone a pour probabilité $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$. Par passage au complémentaire, on peut dire que $P(D) = 0$, autrement dit qu'il est quasi-sûr que les personnes finiront par se rencontrer.

B. Nombre de déplacements avant rencontre

1. La variable X prend bien sûr ses valeurs dans $\mathbb{N}$, mais ne peut pas être égale à 0, ni à 1 (car $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$, donc $P(A_1) = 0$. On a en fait $X(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$.
2. L'évènement X_n est réalisé si A_n est réalisé mais pas A_{n-1}, donc si $A_n \cap B_{n-1}$ ou $A_n \cap C_{n-1}$ sont réalisés. Le premier cas étant impossible, $P(X_n) = P(A_n \cap C_{n-1}) = P(C_{n-1}) \times P_{C_{n-1}}(A_n) = \dfrac{1}{4}c_{n-1} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \dfrac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.
3. L'espérance de X existe car $nP(X=n)$ est une somme de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes. Calculons-la donc :
$E(X) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - 1 - \frac{1}{(1-\alpha)^2} + 1\right) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$.
Or, $\dfrac{1}{(1-\beta)^2} = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^{-2} = \dfrac{64}{14-6\sqrt{5}}$; et $\dfrac{1}{(1-\alpha)^2} = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^{-2} = \dfrac{64}{14+6\sqrt{5}}$. D'où $\dfrac{1}{(1-\beta)^2} - \dfrac{1}{(1-\alpha)^2} = \dfrac{64}{14-6\sqrt{5}} - \dfrac{64}{14+6\sqrt{5}} = \dfrac{64(14+6\sqrt{5}-14+6\sqrt{5})}{196-36\times 5} = \dfrac{64\times 12\sqrt{5}}{16} =$

$48\sqrt{5}$. Encore un petit effort et on en voit le bout : $E(X) = \dfrac{\sqrt{5}}{20} \times 48\sqrt{5} = 12$. Il faudra donc en moyenne 12 déplacements (chacun) pour que P_1 et P_2 se rejoignent.

4. Tentons de calculer $E(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}\beta}{20}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\beta^{n-2} - \frac{\sqrt{5}\alpha}{20}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha^{n-2} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\beta}{(1-\beta)^3} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^3}\right)$. On simplifie ? Allez, soyons fous : $\dfrac{\beta}{(1-\beta)^3} = \beta \times \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^{-3} = \dfrac{512\beta}{72-32\sqrt{5}} = \dfrac{64(5+\sqrt{5})}{72-32\sqrt{5}} = \dfrac{64(5+\sqrt{5})(72+32\sqrt{5})}{72^2 - 32^2 \times 5} = \dfrac{64(520+232\sqrt{5})}{5\ 184 - 5\ 120} = 520+232\sqrt{5}$; de même $\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^3} = \alpha \times \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^{-3} = \dfrac{512\alpha}{72+32\sqrt{5}} = \dfrac{64(5-\sqrt{5})(72-32\sqrt{5})}{72^2 - 32^2 \times 5} = 520-232\sqrt{5}$. Tout compte fait, ce n'est pas si immonde que ça : $E(X(X-1)) = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \times 464\sqrt{5} = 232$. On en déduit via König-Huygens que $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 232 + 12 - 12^2 = 244 - 144 = 100$, soit $\sigma(X) = 10$ (qui eût cru à un résultat si simple il y a quelques lignes ? Hein, je suis sûr que vous avez douté, soyez francs un peu !).

À propos de ces deux dernières questions, le raport du jury est étonamment sobre, se contentant de signaler que « les calculs sont très rarement menés correctement à leur terme ». J'aurais aimé connaitre le nombre de copies qui ont trouvé le 10 ci-dessus...

Exercice 2 : probabilités et analyse

I. Quitte ou double

1. On doit avoir $C_{n+1} = C_n + M_{n+1}$ si $X_{n+1} = 1$, et $C_{n+1} = C_n - M_{n+1}$ si $X_{n+1} = 0$. En constatant que $2X_{n+1} - 1$ prend respectivement la valeur 1 et la valeur -1 si X_{n+1} vaut 0 ou 1, on peut donc écrire $C_n = C_n + (2X_{n+1} - 1)M_{n+1}$.
2. Par linéarité de l'espérance appliquée ç l'équation précédente $E(C_n) - E(C_{n-1}) = E(2X_n - 1)M_n$. Les variables X_n et M_n étant indépendantes, on peut dire que $E((2X_n - 1)M_n) = (2E(X_n) - 1)E(M_n) = (2p-1)E(M_n)$ (j'admets, nous n'avons par encore vu cette propriété, qui sera dans le chapitre 19 du cours). En sommant toutes ces égalités, on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} E(C_k) - E(C_{k-1}) = (2p-1)\sum_{k=1}^{k=n} E(M_k)$ ce qui par télescopage sur la somme de gauche donne exactement le résultat demandé. Comme $2p-1$ est strictement positif au vu de l'hypothèse faite sur p, $E(C_n)$ est d'autant plus grande que les valeurs de $E(M_k)$ sont élevées. Comme M_k est par construction inférieur ou égal à C_{k-1}, il faut choisir $M_k = C_{k-1}$, autrement dit miser tout son capital à chaque fois, pour maximiser $E(C_n)$. Note du correcteur : en fait, la rédaction rigoureuse de cette question est plus compliquée que ça puisque M_k dépend de la valeur de C_{k-1}, ce qui suppose de faire une petite récurrence quelque part.
3. En misant à chaque fois tout ce qu'on possède, on est ruiné à la première partie où l'on perd. Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de cette première partie perdue. Comme la probabilité de perdre une partie vaut $1-p$, X suit une loi géométrique de paramètre $1-p$. En particulier, X est définie quasi-sûrement (donc la ruine est quasi-certaine), et $E(X) = \dfrac{1}{1-p}$, qui représente donc le nombre moyen de parties avant la ruine du joueur.

II. Stratégie à mises proportionnelles

1. Puisqu'on nous donnes la formule, vérifions qu'elle fonctionne dans les deux cas possibles à savoir si $X_{n+1} = 1$ ou $X_{n+1} = 0$. Si on gagne, $(1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n = (1+\alpha)C_n = C_n + M_{n+1} = C_{n+1}$. Si on perd, on a similairement $(1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n = (1-\alpha)C_n = C_{n+1}$. La formule est donc correcte.
2. La variable S_n représente le nombre de parties gagnées parmi les n premières. On sait que S_n suit une loi bonômiale de paramètre (n, p) (note : l'hypothèse d'indépendance des variables X_k est essentielle pour que ce résultat soit vrai, nous reviendrons plus en détail sur ce genre de choses dans le chapitre 19), et a pour espérance $E(S_n) = np$.
3. Une petite récurrence est encore ce qu'il y a de plus simple : pour $n = 1$, comme $S_1 = X_1$, c'est la formule de la question 1. Supposons le résultat vrai pour C_n, alors $C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n = (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}C_0 = (1+\alpha)^{X_{n+1}+S_n}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}+n-S_n}C_0 = (1+\alpha)^{S_{n+1}}(1-\alpha)^{n+1-S_{n+1}}C_0$, ce qui achève la preuve de l'hérédité et la récurrence.
4. Passons au ln l'expression précédente : $\ln C_n = S_n \ln(1+\alpha) - (n - S_n)\ln\ln(1-\alpha) + \ln(C_0)$, soit $\ln \dfrac{C_n}{C_0} = S_n \ln(1+\alpha) + (n - S_n)\ln(1-\alpha)$ puis en mettant de l'espérance partout (et en utilisant sa linéarité) et en utilisant le calcul de l'espérance de S_n effectué plus haut : $E\left(\ln \dfrac{C_n}{C_0}\right) = np\ln(1+\alpha) + (n - np)\ln(1-\alpha)$. Il ne reste plus qu'à tout diviser par n pour obtenir la formule souhaitée (le $\dfrac{1}{n}$ à gauche pouvant passer dans l'espérance en bonne constante qu'il est).

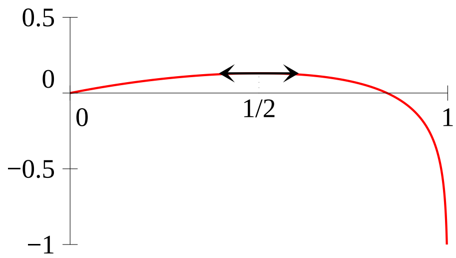
III. Optimisation : le critère de Kelly

1. (a) La fonction f est C^∞ sur $[0;1[$ (elle est définie sur $]-1;1[$), de dérivée $f'(x) = \dfrac{p}{1+x} - \dfrac{1-p}{1-x} = \dfrac{p(1-x)+(p-1)(1+x)}{1-x^2} = \dfrac{p - px + p + px - 1 - x}{1-x^2} = \dfrac{2p-1-x}{1-x^2}$. Sur l'intervalle $[0;1[$, $1 - x^2 > 0$, donc f' est du signe de $2p - 1 - x$, qui s'annule en $\alpha_K = 2p - 1$ (qui appartient bien à $[0;1[$ vu les hypothèses faites sur p). La fonction f étant croissante sur $[0; 2p-1]$ et décroissante ensuite, f admet bien en α_K un maximum. De plus, $f''(x) = \dfrac{-(1-x^2) + 2x(2p-1-x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{x^2 - 1 + 4px - 2x - 2x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{-1 + (4p-2)x - x^2}{(1-x^2)^2}$. Le numérateur de ce quotient a pour discriminant $\Delta = (4p-2)^2 - 4$. Or, $4p - 2 < 2$ (puisque $p < 1$), donc $\Delta < 0$, et f'' est toujours négative, ce qui prouve la concavité de f.

   (b) Comme $\lim\limits_{x \to 1} \ln(1-x) = -\infty$, et $1 - p > 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$. On en déduit que, si on fait tendre α vers 1, $E\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{C_n}{C_0}\right)$ tend vers $-\infty$, autrement dit que $E\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)$ tend vers 0. C'est une nouvelle façon de constater que si on tend à miser tout ce qu'on a, on va certainement se ruiner.

   (c) Calculons $f(0) = p \times 0 + (1-p) \times 0 = 0$, donc f s'annule effectivement en 0. Étant ensuite strictement croissante donc bijective sur $[0; \alpha_K]$, elle ne s'nnulera pas une deuxième fois sur cet intervalle, mais on peut par contre en déduire que $f(\alpha_K) > 0$. Comme f est ensuite strictement décroissante et de limite $-\infty$ en 1, une nouvelle application du théorème de la bijection révèle l'existence (et l'unicité) d'un deuxième point d'annulation α_C appartenant à $]\alpha_K; 1[$.

   (d) Voici à quoi ça ressemble pour $p = \dfrac{3}{4}$ (donc $\alpha_K = \dfrac{1}{2}$) :



2. Si on prend $p = \frac{1}{2}$ (pari exactement équitable), on obtient $\alpha_K = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$, ce qui signifie que pour optimiser le gain, il ne faut pas parier ! Cela est raisonnable puisque le jeu est équilibré en moyenne dans ce cas, mais on a toujours le risque de se ruiner si on n'a pas de chance, alors qu'on n'a pas d'équivalent de la ruine « vers le haut » (on continuera à parier quoi qu'il arrive si on ne se ruine pas). Dans le cas où $p = 1$, on obtient $\alpha = 1$, ce qui signifie que si on est certain de toujours gagner on a intérêt à toujours miser tout ce qu'on a (pas besoin d'explication pour comprendre ce résultat-là...).

IV. Étude de la valeur critique α_C

1. (a) Le prolongement en 1 ne pose pas de problème : le numérateur tend vers $\ln 2$ et le dénominateur vers $-\infty$, donc $\lim_{x \to 1} \varphi(x) = 0$, on prolonge en posant $\varphi(1) = 0$. Du côté de 0, on sait que $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$, et donc $\ln(1 - x) \underset{0}{\sim} -x$, d'où $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{-x} = -1$, et on peut prolonger φ en 0 en posant $\varphi(0) = -1$.

   (b) La fonction φ est dérivable sur $]0; 1[$ par théorèmes généraux (son dénominateur ne s'annule pas), de dérivée $\varphi'(x) = \dfrac{\frac{\ln(1-x)}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1-x}}{(\ln(1-x))^2} = \dfrac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}$, avec $h(x) = (1 - x)\ln(1 - x) + (1 + x)\ln(1 + x)$.

   (c) La fonction h est C^∞ sur $]0; 1[$, de dérivée $h'(x) = -\ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x} + \ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Or, $\forall x \in]0; 1[$, $1 + x > 1$ et $0 < 1 - x < 1$, donc $\frac{1+x}{1-x} > 1$, et $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $]0; 1[$.

   (d) Comme par ailleurs $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$, la fonction h est toujours strictement positive sur $]0; 1[$, et φ est strictement croissante, donc bijective sur $]0; 1[$ (sa dérivée étant du signe de h). On en déduit que φ est aussi bijective sur $[0; 1]$, à valeurs dans $[-1; 0]$ au vu des limites calculées un peu plus haut.

2. Signalons donc que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, et du coup que $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On a donc $h(x) = (1-x)\left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) \sim x^2$. Par ailleurs, $(1 - x^2)(\ln(1 - x))^2 \underset{x \to 0}{\sim} (-x)^2 \sim x^2$, donc on a $\varphi'(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \sim 1$, c'est-à-dire que $\lim_{x \to 0} \varphi'(x) = 1$. Il ne reste plus qu'à appliquer un petit coup de théorème du prolongement C^1 (φ est bien C^1 sur $]0; 1[$) pour en déduire que φ est dérivable en 0, de dérivée $\varphi'(0) = 1$.

3. (a) Par définition de α_C, on a $p\ln(1 + \alpha_C) + (1 - p)\ln(1 - \alpha_C) = 0$, soit $p\ln(1 + \alpha_C) = (p - 1)\ln(1 - \alpha_C)$ et donc $\frac{\ln(1 + \alpha_C)}{\ln(1 - \alpha_C)} = \frac{p - 1}{p}$ (on peut quotienter, α_C étant distinct de 0 et de 1). On a obtenu $\varphi(\alpha_C) = 1 - \frac{1}{p}$, ce qui donne bien la relation souhaitée.

(b) Lorsque p tend vers $\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{p}$ tend vers $1-2=-1$. Or, au vu des résultats précédents, φ^{-1} est définie en -1, prenant pour valeur $\varphi'(-1)=0$ (puisque $\varphi(0)=-1$), et y est même dérivable puisque φ est dérivable de dérivée non nulle en 0. En appliquant la formule de dérivation des fonctions réciproques, on a d'ailleurs $(\varphi^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\frac{1}{2}))}=\frac{1}{\varphi'(0)}=1$. On en déduit que $\alpha_C\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi^{-1}(-1)=0$, et par dérivation de composée, $\alpha'_C(p)=\frac{1}{p^2}(\varphi^{-1})'\left(1-\frac{1}{p}\right)$, donc $\alpha'_C\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{4}}(\varphi^{-1})'(0)=4$ comme annoncé.

(c) Au voisinage de $p=\frac{1}{2}$, on peut écrire le développement limité à l'ordre 1 de α_C : $\alpha_C(p)=\alpha_C\left(\frac{1}{2}\right)+\left(p-\frac{1}{2}\right)\alpha'_C\left(\frac{1}{2}\right)+o\left(p-\frac{1}{2}\right)\sim 4\left(p-\frac{1}{2}\right)\sim 4p-2$, qui est égal à $2\alpha_K$, d'où l'équivalent annoncé.

V. Simulation informatique

1. Les quatre lignes en question deviennent logiquement :

```
while cap < cap_obj do
cap := (1+alpha)*cap;
cap := (1-alpha)*cap;
n := n+1;
```

2. Allez, recopions un programme complet :

```
PROGRAM kelly2;
VAR n : integer; cap,capkelly,capobj,u,p,alpha,alphakelly : real;
BEGIN
WriteLn('Valeur de p ?'); ReadLn(p);
WriteLn('Objectif à atteindre ?'); ReadLn(capobj);
WriteLn('Valeur de alpha ?'); ReadLn(alpha);
cap := 100; capkelly := 100; alphakelly := 2*p-1; n := 0;
Randomize;
WHILE cap < capobj DO
BEGIN
u := random;
IF u<p THEN
BEGIN
cap := (1+alpha)*cap; capkelly := (1+alphakelly)*capkelly;
END
ELSE BEGIN
cap := (1-alpha)*cap; capkelly := (1-alphakelly)*capkelly;
END;
n := n+1;
END;
WriteLn('On a joué ',n,' parties');
WriteLn('Le capital atteint est de ',cap);
WriteLn('Le capital optimal aurait été de ',capkelly);
END.
```