Espaces vectoriels

ECE3 Lycée Carnot

9 juin 2010

Introduction

Les deux derniers chapitres du cours (on approche de la fin) vont nous servir à introduire et commencer à étudier des notions que vous reverrez beaucoup plus en détail l'an prochain. En gros, l'idée pour nous est surtout de voir les matrices sous un autre angle, comme une façon de caractériser certaines applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous allons introduire l'outil extrêmement utile mais assez formel que représentent les espaces vectoriels. Pas grand chose à voir avec les vecteurs tels que vous pouvez en avoir vu dans votre jeunesse, il s'agit en gros de généraliser le calcul sur les coordonnées (que vous avez déjà abordé dans le cadre des vecteurs du plan ou, pour ceux qui ont fait la spécialité maths, de l'espace) à des ensembles très généraux, les fameux espaces vectoriels.

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

1.1 Définition et exemples

Définition 1. Un ensemble E est un **espace vectoriel réel** s'il est muni d'une addition $+ : E \times E \to E$ et d'un produit par les réels $. : \mathbb{R} \times E \to E$ vérifiant les conditions suivantes :

- L'addition est associative ($\forall x, y, z \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$) et commutative ($\forall x, y \in E^2$, $x+y = y+x$).
- Il existe un élément neutre pour l'addition, c'est-à-dire un élément de E noté 0 tel que $\forall x \in E$, $0 + x = x + 0 = 0$.
- Tout élément x de E possède un opposé dans E, c'est-à-dire un élément y tel que $x + y = y + x = 0$ (on note alors $y = -x$).
- Le produit est compatible avec le produit des réels : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
- Le réel 1 est un élément neutre pour le produit : $\forall x \in E$, $1.x = x$.
- Le produit est doublement distributif par rapport à l'addition : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E^2$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Les éléments de E sont alors appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{R}$ par lesquels on peut les multiplier sont appelés **scalaires**.

Remarque 1. Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique, et on peut en fait les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition (qui prend deux éléments de E et sort un troisième élément de E), et un produit **par des réels** (et non pas cette fois un produit d'éléments de E) qui vérifient des conditions assez naturelles.

Exemples :

- L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel réel, la somme de deux suites (u_n) et (v_n) étant la suite $(u_n + v_n)$, et le produit d'une suite (u_n) par un réel λ étant la suite (λu_n). De même, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel (on a prouvé toutes les propriétés de la définition précédente dans le cas des matrices lors de notre premier chapitre consacré au calcul matriciel). Attention toutefois, l'ensemble de toutes les matrices

(sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).
- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égalà n est un espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels est aussi un espace vectoriel.
- L'espace vectoriel des matrices lignes (ou colonnes) à n lignes sera souvent identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ constitué de l'ensemble des n-uplets de réels (muni de l'addition et du produit extérieur coordonnée par coordonnée).
- L'ensemble des vecteurs dans le plan (ou dans l'espace) est un espace vectoriel. On sait faire la somme de deux vecteurs (via la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme), et faire le produit d'un vecteur par un réel. Comme vous avez appris à le faire au lycée, on peut identifier ces vecteurs à des couples de réels (dans le cas du plan) ou des triplets de réels (dans l'espace) grâce à l'introduction de coordonnées une fois un repère choisi.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2. Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble F de E est un **sous-espace vectoriel** s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication définies sur E).

Proposition 1. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- $0 \in F$
- $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in F$, $\lambda.x \in F$.

Remarque 2. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est non vide et stable par addition et par multiplication par un réel. La proposition est évidente. On peut d'ailleur remplacer les deux dernières conditions par la suivante : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in F^2$, $\lambda x + y \in F$.

Exemples : L'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel. En effet, la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et le produit d'une matrice diagonale par un réel est diagonale.
Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x\ y\ z) \mid x+y+z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel mais $G = \{(x\ y\ z) \mid x+y+z = 1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).
L'ensemble des polynomes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynomes, mais l'ensemble des polynomes de degré n n'est pas un sous-espace vectoriel (la somme de deux polynomes de degré n peut avoir un degré strictement inférieur à n).
Exercice Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Les fonctions constantes.
2. Les fonctions croissantes (au sens large).
3. Les fonctions monotones.
4. Les fonctions vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
5. Les fonctions vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
6. Les fonctions ayant une limite finie en $+\infty$.
7. Les fonctions admettant une asymptote oblique en $+\infty$.
8. Les fonctions de période 2.
9. Les fonctions périodiques.
10. Les fonctions de classe C^2 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + 3f'(x) - 2f(x) = 0$.
11. Les fonctions dérivables sur $]-\infty; 0]$.

Corrigé de l'exercice

1. C'est un sous-ev (contient la fonction nulle, stable par somme et produit par un réel).
2. Ce n'est pas un sous-ev, le produit d'une fonction croissante (et non constante) par -1 étant rarement une fonction croissante.
3. Ce n'est pas un sous-ev non plus, car la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'est pas toujours monotone.
4. Ce n'est pas un sous-ev, la fonction nulle n'appartient pas à l'ensemble.
5. C'est un sous-ev (règles de calcul usuelles sur les limites).
6. C'est aussi un sous-ev (toujours les règles classiques).
7. C'est également un sous-ev (en admettant les asymptotes horizontales comme cas particuliers d'asymptotes obliques) : si $f(x) \underset{+\infty}{=} ax+b+o(1)$ et $g(x) \underset{+\infty}{=} cx+d+o(1)$, alors $\lambda f(x)+g(x) \underset{+\infty}{=} (\lambda a+c)x+(b+d)+o(1)$, donc $\lambda f+g$ admet aussi une asymptote oblique.
8. C'est assez clairement un sous-ev.
9. C'est plus compliqué, mais ce n'est pas un sous-ev, la somme d'une fonction périodique de période 1 et d'une fonction périodique de période $\sqrt{2}$ n'étant par exemple pas périodique en général.
10. C'est un sous-ev (à cause de la linéarité de la dérivation).
11. C'est un sous-ev (propriété classiques de la dérivation).

Exemple très important : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de k équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^n$. On peut d'ailleurs toujours décrire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'un tel système d'équations.

Exemple : L'ensemble des solutions su système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On sait qu'on peut écrire les solutions d'un tel système (qui ne peut pas être de Cramer puisqu'il a plus d'inconnues que d'équations) en fonctions d'une ou plusieurs de ses inconnues. C'est la motivation de l'introduction de l'autre façon de décrire un sous-espace vectoriel, que nous allons étudier pour cette fin de paragraphe.

Définition 3. Une **famille de vecteurs** dans un espace vectoriel E est un k-uplet $(e_1, \dots, e_k)$ d'éléments de E.

Remarque 3. Attention bien sûr à ne pas confondre une famille de vecteurs de E, et un vecteur qui est souvent lui-même un n-uplet de réels.

Définition 4. Une combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \dots, e_k)$ de vecteurs de E est un vecteur $x \in E$ qui peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i e_i$, pour une k-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de réels.

Exemples : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(2\ 5\ -3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1\ -2\ 6)$ et $(-1\ 11\ -21)$, puisque $3(1\ -2\ 6) + (-1\ 11\ -21) = (2\ 5\ -3)$. Par contre, le vecteur $(0\ 9\ 2)$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux même vecteurs.

Dans l'espace vectoriel des matrices à 3 lignes et 3 colonnes $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 24 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \\ -12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et I puisque $A = \frac{1}{2}B + I$.

Définition 5. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est noté $Vect(e_1, \dots, e_k)$.

Proposition 2. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs de E, alors $Vect(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant e_1, e_2, …, e_k. On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille.

Démonstration. Une somme de deux combinaisons linéaires est bien une combinaison linéaire : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i$, et de même pour un produit par un réel : $\rho \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\rho\lambda_i) e_i$, donc $Vect(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, un sous-espace contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires puisqu'un sous-espace est stable par combinaisons linéaires, donc il contient forcément $Vect(e_1, \dots, e_k)$. $\square$

Exemple : L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(2x + y \;\; 3x - 2y \;\; -x)$, x et y étant deux réels, est un sous-espace vectoriel. Il s'agit en fait du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $(2 \; 3 \; -1)$ et $(1 \; -2 \; 0)$, puisque $(2x + y \;\; 3x - 2y \;\; -x) = x(2 \; 3 \; -1) + y(1 \; -2 \; 0)$ s'écrit bien comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Proposition 3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit F comme l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + 2z = 0$, et $G = Vect((1 \; 0 \; -1), (-2 \; 1 \; 1))$. Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, leur intersection en est donc aussi un. Pour la décrire le plus simplement possible, le mieux est d'écrire les vecteurs de G comme combinaison linaires, et de leur faire vérifier l'équation définissant F : $x \in G \Leftrightarrow x = (\lambda - 2\mu \;\; \mu \;\; \mu - \lambda)$, pour un certain couple de réels (λ, μ). Le vecteur x appartient aussi à F si $\lambda - 2\mu - \mu + 2\mu - 2\lambda = 0$, soit $-\lambda - \mu = 0$, donc $\mu = -\lambda$. On a alors $x = (3\lambda \;\; -\lambda - 2\lambda)$, dont on déduit que $F \cap G = Vect((3 \;\; -1 \;\; -2))$.

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles génératrices

Définition 6. Une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est dite **génératrice** tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_k)$: $\forall x \in E$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Autrement dit, $Vect(e_1, \dots, e_k) = E$.

Remarque 4. Pour prouver qu'une famille est génératrice, il faut prouver que l'équation $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, qui peut s'écrire comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients λ_i, admet toujours une solution.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((0 \; 2 \; 0), (2 \; -1 \; 2), (1 \; -3 \; 0), (1 \; -2 \; 3))$ est génératrice car le système $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & = & & & 2b & + & c & + & d \\ y & = & 2a & - & b & - & 3c & - & 2d \\ z & = & & & 2b & & & + & 3d \end{array} \right.$ admet par exemple comme solution $\left(\frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{5z}{4}, \frac{z}{2}, x - z, 0 \right)$.
Pour la résolution, on a tout bêtement imposé $d = 0$ pour se ramener à un système triangulaire aisé à résoudre. Cela signifie que la famille est toujours génératrice si on en supprime le dernier vecteur !

2.2 Familles libres

Une famille génératrice était une famille permettant de reconstituer tout l'espace E, mais contenant éventuellement « trop » de vecteurs. Une famille libre est en quelque sorte le contraire : on ne peut pas supprimer de vecteurs, mais il se peut qu'on en ait pas assez.

Définition 7. Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$ est **libre** si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (on dit que ses vecteurs sont linéairement indépendants). Autrement dit, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$, alors $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i = 0$. Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs est liée.

Remarque 5. Pour prouver qu'une famille est libre, il faut vérifier que le système linéaire homogène obtenu en écrivant l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$ est de Cramer.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((2\ 1\ 0), (1\ -1\ -1), (0\ 3\ -1))$ est libre car le système
$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ a pour unique solution $(0, 0, 0)$.

2.3 Bases et dimension

Après avoir défini des familles de vecteurs ayant trop ou pas assez de vecteurs, nous allons maintenant passer à la notion la plus intéressante, celle de famille ayant juste le bon nombre de vecteurs.

Définition 8. Une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est à la fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'élements de la famille.

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) vérifiant $3x - 2y = z$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il est constitué de tous les vecteurs de la forme $(x, y, 3x - 2y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, -2)$. La famille $((1, 0, 3); (0, 1, -2))$ est donc génératrice de F. Comme de plus elle est libre (les deux vecteurs n'étant pas proportionnels), c'est donc une base de F.

Définition 9. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$. Les réels λ_i sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, et les vecteurs $\lambda_i e_i$ **composantes** de x dans cette même base.

Proposition 4. La famille $((1, 0, \dots, 0); (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée base canonique.

Démonstration. Si on note $e_i = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0)$, tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc la famille est génératrice. De plus, si on avait $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, on aurait donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, soit en décomposant suivant chaque coordonnée $\lambda_i = \mu_i$, donc chaque décomposition est unique. La famille est donc également libre. □

Définition 10. Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une base (une base étant toujours une famille finie). Dans ce cas, toutes les bases de E comportent le même nombre d'éléments, qui est appelé **dimension** de E.

Exemple : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est sans surprise de dimension n.

Théorème 1. (théorème de la base incomplète) Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre dans un espace E de dimension n. Alors $k \leqslant n$ et il existe des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E (on peut donc compléter une famille libre en une base).

Démonstration. Ce théorème, comme l'affirmation contenue dans la définition précédente, ne seront pas démontrés cette année. □

Proposition 5. Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre possède au plus n éléments, et toute famille libre de n éléments est une base. Toute famille génératrice possède au moins n éléments, et toute famille génératrice de n éléments est une base.

Proposition 6. Soit F un sous-epace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors F est de dimension finie $p \leqslant n$.

Démonstration. Encore un résultat plus technique qu'il n'en a l'air, que nous admettrons. □

Exemple : Nous avons montré un peu plus haut que l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels vérifiant $3x - 2y = z$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

2.4 Exemples détaillés : matrices, polynomes, suites

En dehors des espaces $\mathbb{R}^n$, qui sont très intéressants mais un peu élémentaires, nous étudierons de temps à autre d'autres espaces vectoriels, qui sont constitués d'objets mathématiques d'usage courant. Voici quelques résultats sur les matrices et les polynomes.

Proposition 7. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np. Une base (souvent appelée base canonique) est constituée des matrices $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$) ayant pour seul coefficient non nul le coefficient d'indice ij, qui vaut 1 : $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Le fait que les ensembles de matrices soient des espaces vectoriels découle des propriétés de l'addition de matrices et du produit de matrices par un réel vues il y a maintenant quelques chapitres. De plus, la famille $E_{i,j}$ est bien génératrice puisque, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $M = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} m_{i,j} E_{i,j}$. Enfin, prouvons que la famille est libre. Supposons qu'une combinaison linéaire des vecteurs de la famille soit nulle : $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. La somme de gauche étant simplement la matrice dont le coefficient d'indice i, j vaut $\lambda_{i,j}$, elle est nulle seulement si tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, la famille est donc bien libre. Comme il y a np éléments dans cette base, cela prouve que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np. □

Proposition 8. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel de degré $n + 1$. Une base (souvent appelée base canonique) de $\mathbb{R}_n[X]$ est constituée des polynomes $1, X, X^2, \dots, X^n$.

Démonstration. Le fait que ce soit un espace vectoriel est pénible mais facile à montrer. Ensuite, par définition, tout polynome de degré inférieur ou égal à n est une combinaison linéaire de 1, X, …, X^n. Et si une combinaison linéaire de ces éléments est nulle, c'est qu'il s'agit du polynome dont tous les coefficients sont nuls (rappelons que cela découle du fait que le polynôme admet alors une grosse infinité de racines, ce qui n'est guère possible pour un polynôme dedegré n autre que le polynôme nul), donc la famille est libre. Comme elle est constituée de $n + 1$ éléments, cela prouve que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$. □

Proposition 9. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, toute famille constituée de $n + 1$ polynomes de degré respectifs $n + 1$, n, …, 1 est une base.

Démonstration. Considérons une telle famille P_n, P_{n-1}, ..., P_0 (avec P_i de degré i). La famille étant constituée de $n+1$ vecteurs, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons qu'une combinaison linéaire s'annule : $Q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Un polynome est nul si tous ses coefficients sont nuls. Mais le coefficient de degré n de Q vaut λ_n fois celui de P_n puisque les autres éléments de la famille sont de degré inférieur. On doit donc avoir $\lambda_n = 0$. Mais du coup, le coefficient de degré $n-1$ de Q vaut λ_{n-1} fois celui de P_{n-1}, donc $\lambda_{n-1} = 0$, et ainsi de suite (une petite récurrence pour les courageux). Finalement, tous les λ_i sont nuls, donc la famille est libre, donc est une base. □

Proposition 10. L'ensemble S des suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble des suites réelles. Dans le cas où son équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, les deux suites géométriques définies par $u_n = r_1^n$ et $v_n = r_2^n$ forment une base de S. Si l'équation caractéristique a une solution double r, les suites $u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ forment une base de S.

Démonstration. Commençons par prouver que S est un espace vectoriel de dimension 2 : S est l'ensemble des suites vérifiant une certaine relation $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ (pour $n \geqslant 2$). Si on prend deux suites y_n et z_n vérifiant cette relation, leur somme $y_n + z_n$ la vérifiera aussi, et de même pour λy_n. L'ensemble S est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
Notons à présent x la suite vérifiant $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ et qui appartient à S (donc qui vérifie la récurrence pour $n \geqslant 2$) et y la suite de S vérifiant $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$. La famille (x, y) est libre (en effet, les deux suites ne sont pas proportionnelles), mais également génératrice de S. En effet, soit z un élément de S, $a = z_0$ et $b = z_1$, on a en fait $z = ax + by$: cela est vrai pour les deux premiers termes de la suite, et ensuite cela le reste par récurrence. On en déduit que S est de dimension 2 et que (x, y) en est une base.
Maintenant qu'on connait la dimension de S, il suffit de vérifier que (u_n) et (v_n) appartiennent à S et forment une famille libre pour constituer une base de S. Dans le cas où on a deux racines, vérifions que $(u_n) \in S$: $au_{n+1} + bu_n = ar_1^{n+1} + br_1^n = r_1^n(ar + b) = r_1^n \times r_1^2 = r_1^{n+2} = u_{n+2}$ (en effet, on a $r_1^2 = ar_1 + b$ par définition de r_1). De même, $(v_n) \in S$, et les deux suites ne sont pas proportionnelles (en effet $u_0 = v_0 = 1$, mais $u_1 \neq v_1$). La famille (u_n, v_n) est donc une base de S. De même, dans le cas où on a une racine double, la famille (r^n, nr^n) est libre car $r^1 = 1r^1$, mais $r^0 \neq 0$. De plus, r^n vérifie bien la récurrence pour la même raison que tout à l'heure et nr^n aussi : $a(n+1)r^{n+1} + bnr^n = nr^n(ar + b) + ar^{n+1} = nr^{n+2} + ar^{n+1} = r^{n+2}\left(n + \frac{a}{r}\right) = r^{n+2}(n+2) = v_{n+2}$, car, si l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une racine double, celle-ci vaut $\frac{a}{2}$, donc $\frac{a}{r} = 2$. □