Ecricome 2002 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

24 mars 2010

I. Étude du cas $c = 0$.

1. On cherche à compter le nombre de boules blanches tirées lors de n tirages avec remise. La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

2. On a $Y = 0$ si on tire n boules noires, donc $P(Y = 0) = \dfrac{1}{2^n}$. Et on a $Y = k$ si la séquence de tirages commence par $NN \dots NB$, avec $k - 1$ noires au départ, ce qui a une probabilité $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^k}$.

3. En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

4. Une façon de faire est de prouver par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.

   Pour $n = 1$, la somme de gauche se réduit à x, et le quotient de droite vaut $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^2} = \dfrac{x(x-1)^2}{(1-x)^2} = x$, donc P_1 est vraie.

   Supposons donc P_n vérifiée, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}$ (on a ici utilisé l'hypothèse de récurrence). Mettons tout cela au même dénominateur pour obtenir $\dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1}(1 - 2x + x^2)}{(1-x)^2}$
   $= \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$
   $= \dfrac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$. Ceci correspond exactement à la formule qu'on doit obtenir pour que P_{n+1} soit vérifiée, et achève donc la récurrence.

5. On applique le résultat précédent. On a $\displaystyle E(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2}$
   $= \frac{1}{2^n}\left(n - 2(n+1) + 2^{n+1}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

II. Étude du cas $c \neq 0$.

1. Z_p est simplement le nombre de boules blanches tirées après p tirages.

2. Pour X_1, il n'y a que deux boules dans l'urne, on a $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$ et donc $E(X_1) = \dfrac{1}{2}$.

3. Si on suppose $X_1 = 0$, c'est-à-dire si une boule noire a été tirée au premier tirage, on se retrouve avec 1 boule blanche et $c+1$ boules noires au deuxième tirage, donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \dfrac{c+1}{c+2}$ et $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{c+2}$. De même, on a $P_{X_1=1}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{c+2}$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \dfrac{c+1}{c+2}$. On en déduit via la formule des probabilités totales (les évènements $X_1 = 0$ et $X_1 = 1$ formant un système complet d'évènements) que $P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{c+1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$. De même, $P(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2}$. La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1, et $E(X_2) = \dfrac{1}{2}$.
4. On a $Z_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $P(Z_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{c+1}{c+2} = \dfrac{c+1}{2(c+2)}$; $P(Z_2 = 1) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{c+2}$; $P(Z_2 = 2) = \dfrac{c+1}{2c+4}$.
5. On a bien sûr $Z_p(\Omega) = \{1; 2; \dots ; p\}$.
6. (a) Si on fait l'hypothèse que $Z_p = k$, on a donc tiré k boules blanches lors des p premiers tirages, et par conséquent $p-k$ boules noires lors de ces même tirages. On a donc ajouté à k reprises c boules blanches dans l'urne, ce qui nous fait un total de $kc+1$ boules blanches dans l'urne avant le tirage numéro $p+1$ (il y en avait une au départ). De même, on a ajouté $p-k$ fois c boules noires et on se trouve avec $(p-k)c+1$ boules noires. Soit un total de $kc+1+(p-k)c+1 = pc+2$ boules dans l'urne, ce qui est tout à fait normal puisqu'on avait deux boules au départ et qu'on en ajoute p à chaque tirage. La probabilité de tirer une boule blanche au tirage $p+1$ vaut alors $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{kc+1}{pc+2}$.

   (b) Les évènements $Z_p = 0$; $Z_p = 1$; ... ; $Z_p = p$ forment un système complet d'évènements. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales puis exploiter le calcul de la question précédente pour écrire : $P(X_{p+1} = 1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p = k) \times P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{kc+1}{pc+2} P(Z_p = k) = \frac{c}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} kP(Z_p = k) + \frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p = k) = \frac{cE(Z_p)}{pc+2} + \frac{1}{pc+2}$ (la dernière somme étant nulle car elle représente la somme des probabilités d'une loi de probabilité).

   (c) Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $P(X_1 = 1) = P(X_2 = 2) = \cdots = P(X_n = 1) = \dfrac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 1 (on l'a constaté en début de problème), supposons la vérifiée au rang n. On en déduit que $E(Z_p) = E(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} X_k) = \sum_{k=1}^{k=n} E(X_k) = \frac{n}{2}$, puis en utilisant le résultat de la question précédente que $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{c\frac{n}{2}+1}{nc+2} = \dfrac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence.