Chapitre 10 : Fonctions à deux variables

ECE3 Lycée Carnot

10 décembre 2009

1 Aspect graphique

Définition 1. Une **fonction de deux variables** est une application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, où $\mathcal{D}$ est une sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ appelé domaine de définition de la fonction f.

Exemples : La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$ est une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. La fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y - 1)$ est une fonction définie sur l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $x + y - 1 > 0$, qui se trouve être le demi-plan supérieur ouvert délimité par la droite d'équation $y = 1 - x$.

Proposition 1. Tout sous-ensemble de la forme $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite.

Démonstration. Si $b \neq 0$, on peut mettre l'équation sous la forme $y = \dfrac{-c - ax}{b}$, qui est bien une équation de droite. Et si $b = 0$, on a par hypothèse $a \neq 0$, donc on obtient $x = \dfrac{-c}{a}$, qui est également une droite, en l'occurence parallèle à l'axe des ordonnées. $\square$

Exemple : La fonction $h : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ est définie à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 2.

Proposition 2. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = R$, avec $R \geqslant 0$, est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{R}$ (si $R < 0$, l'ensemble est vide).

Démonstration. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère orthonormal, mais ce sera toujours le cas pour nous), le point M de coordonnées (x, y) est situé à une distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ de l'origine O du repère (c'est une application du théorème de Pythagore), donc $x^2 + y^2 = R \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow OM = r$. l'ensemble des points à distance r de O est bien le cercle de centre O et de rayon r. $\square$

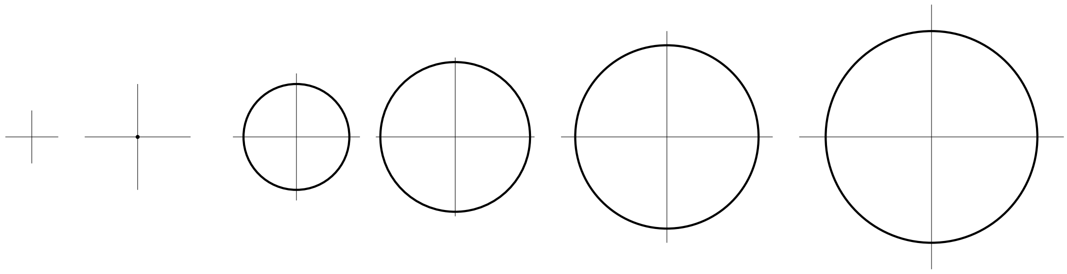
Définition 2. La **représentation graphique** d'une fonction de deux variables dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $z = f(x, y)$.

Remarque 1. Une fonction de deux variables est donc représentée non pas par une courbe, mais par une surface dans l'espace. Il est très difficile en général de visualiser ce genre de représentations graphiques, c'est pourquoi on en est souvent réduit à étudier les coupes par des plans que représentent les lignes de niveau et les applications partielles.

Définition 3. Soit k un réel et f une fonction de deux variables, la **ligne de niveau** k de la fonction f est l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $f(x, y) = k$.

Remarque 2. Il s'agit donc de la coupe de la surface représentative de f par le plan « horizontal » d'équation $z = k$. La plupart du temps, une ligne de niveau n'est pas la courbe représentative d'une fonction à une variable.

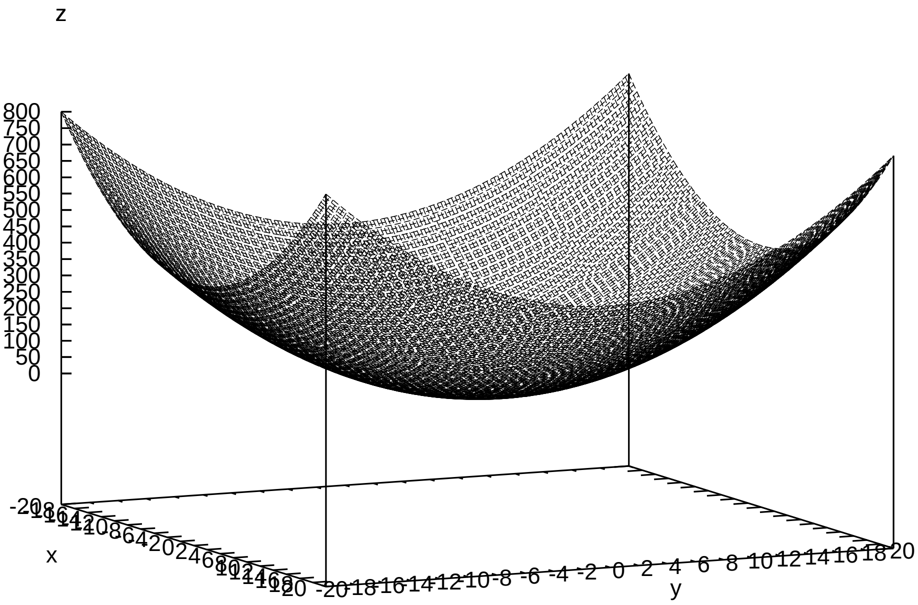
Exemple : Considérons la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$, sa ligne de niveau k est définie par l'équation $x^2+y^2 = k$. il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$ quand k est positif, la ligne de niveau est vide sinon. Voici une représentation des lignes de niveau pour k entier compris entre -1 et 4. il ne reste plus qu'à les relier mentalement pour imaginer l'allure de la surface représentative de f.



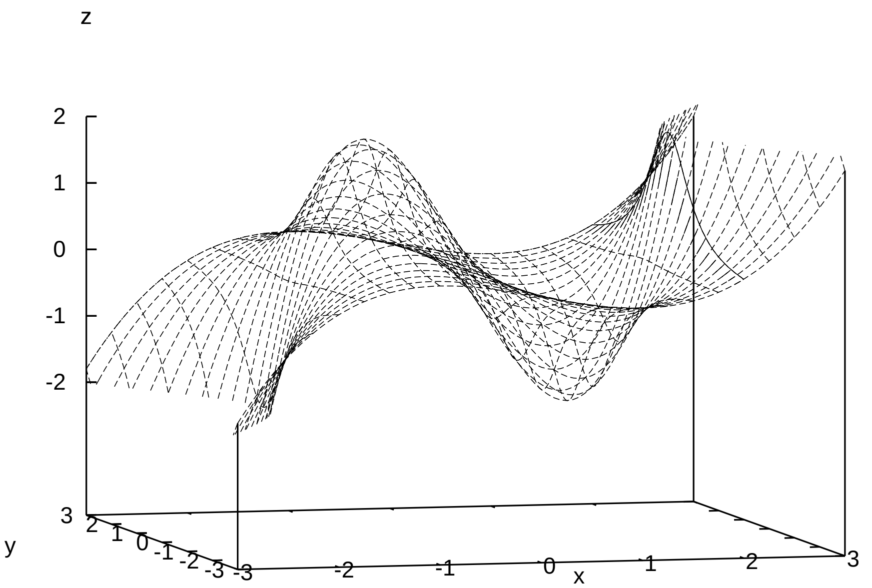
2 Exemple de surfaces

Juste quelques surfaces tracées à l'ordinateur pour avoir une idée de ce à quoi ça peut ressembler.

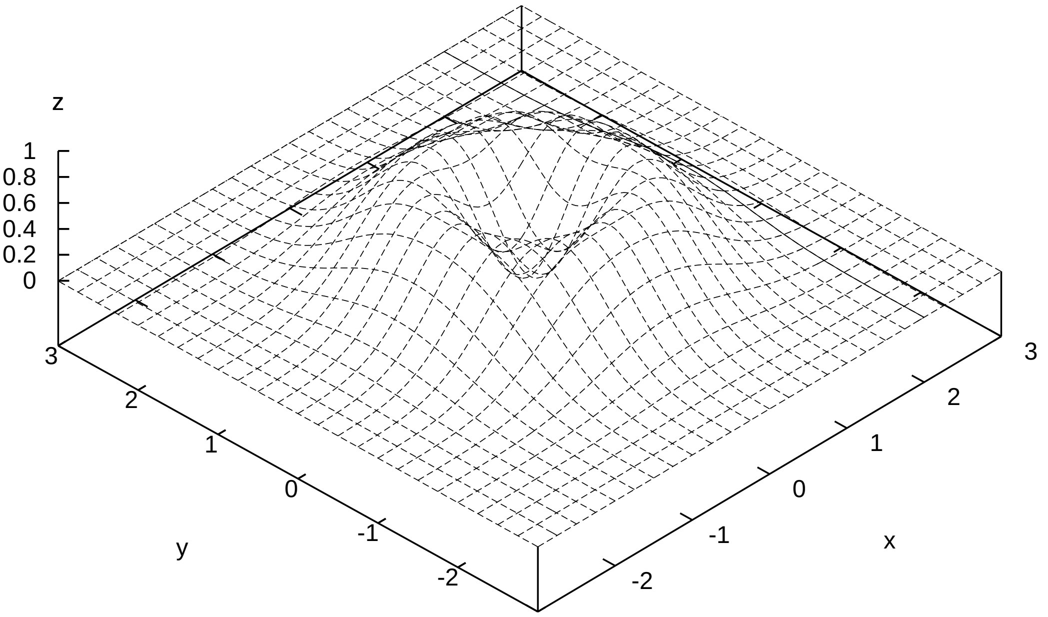
f(x,y)=x^2+y^2



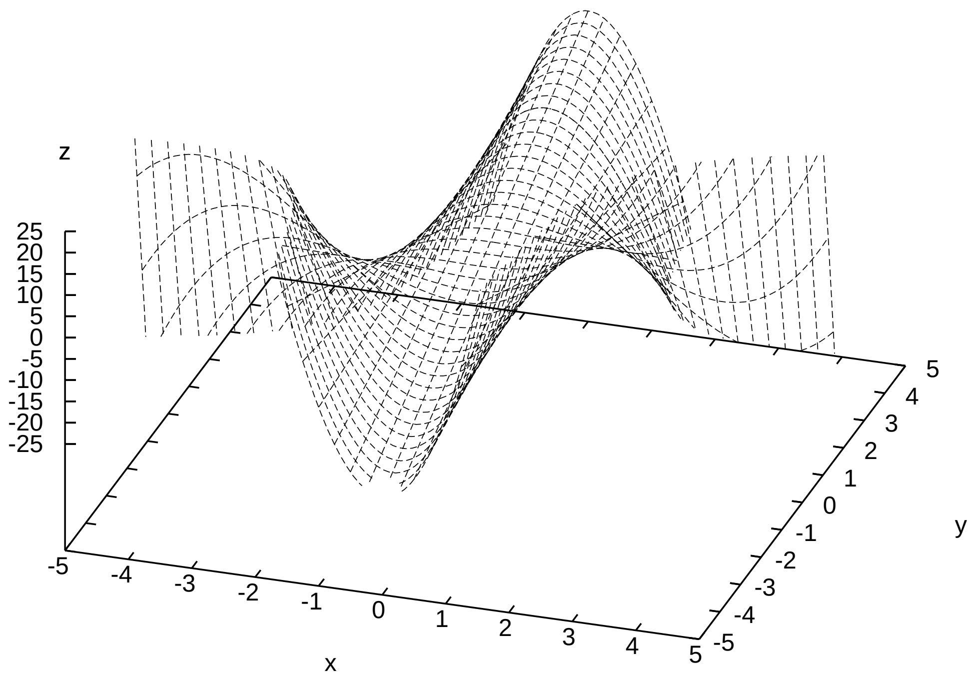
f(x,y)=(x^3-3x)/(1+y^2)



f(x,y)=2(x^2+y^2)e^(-x^2-y^2)



f(x,y)=x^3-4x^2y+5y-2



3 Dérivées partielles

On ne peut pas étudier les variations d'une fonction de deux variables comme on le fait pour une fonction à une variable, puisque la simple notion de fonction croissante ou décroissante n'a pas d'équivalent quand on passe à deux variables. Il est cependant intéressant de calculer un analogue de la dérivée dans ce cadre, qui permet notamment de trouver les minima ou maxima de la fonction, comme c'est le cas pour une fonction à une variable.

Définition 4. Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ à deux variables, les **applications partielles** associées sont les deux fonctions à une variable $f_x : x \mapsto f(x,y)$ et $f_y : y \mapsto f(x,y)$.

Remarque 3. Les applications partielles sont donc données par la même équation que la fonction f elle-même, seul le statut de x et de y change : au lieu d'avoir deux variables, l'une d'elles est désormais fixée, même si on ne connait pas sa valeur. Pour rendre les choses plus concrètes, on peut assigner une valeur à la varible fixée. Par exemple, si $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$, on dira que l'application partielle obtenue en fixant $y = 1$ est la fonction d'une variable $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ (on a posé $y = 1$ dans l'équation de f), ou que l'application partielle obtenue en fixant $x = 2$ est la fonction $y \mapsto 4 - 6y + y^3$. Tracer les représentations graphiques de ces applications partielles revient à tracer la coupe de la surface représentative de f par les plans d'équation respective $y = 1$ et $x = 2$ (plans « verticaux » si on oriente le repère de façon habituelle).

Définition 5. Les **dérivées partielles** d'une fonction à deux variables sont les dérivées de ses application partielles. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée de f_x et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ celle de f_y.

Remarque 4. Pour calculer ces dérivées partielles, on dérive en considérant l'une des deux variables comme une constante (on dit qu'on dérive la fonction f par rapport à x ou y respectivement), mais chacune des deux dérivées partielles reste une fonction à deux variables.

Remarque 5. On se contentera de calculer ces dérivées partielles sans se préocupper de justifier leur existence, ce qui est un problème plus complexe que dans le cas d'une fonction à une variable.

Définition 6. Les quatres dérivées partielles des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (deux pour chaque fonction) sont appelées **dérivées partielles secondes** de la fonction f. On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ les dérivées partielles par rapport à x et y de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exemples : Reprenons l'exemple de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$. On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^3$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 3xy^2 - 8y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 4y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4x + 3y^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x + 3y^2$ et enfin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy - 8$.

De même, la fonction $g : (x,y) \mapsto \ln(x + y - 1)$ a pour dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x+y-1}$; $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x+y-1}$; $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{1}{(x+y-1)^2}$, et les trois autres dérivées secondes sont les mêmes que la première.

Enfin, la fonction $h : (x,y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ vérifie $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{-\sqrt{4 - x^2 - y^2} - x \times \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}}{4 - x^2 + y^2} = \dfrac{y^2 - 4}{(4 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-y \times \frac{-2x}{-2}}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-xy}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-xy}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$ et enfin $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \dfrac{x^2-4}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Définition 7. Un **point critique** pour une fonction f à deux variables est un couple (x,y) vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exemple : Les points critiques de la fonction f définie plus haut sont les solutions du système suivant (qu'on est bien incapable de résoudre) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2+4xy+y^3 & = & 0 \\ 2x^2+3xy^2-8y & = & 0 \end{array} \right.$$

Théorème 1. Si une fonction f admet un minimum ou un maximum local en un point (x,y), alors ce point est un point critique.

Remarque 6. Attention, comme dans le cas des fonctions à une variable, la réciproque n'est pas toujours vraie.

Définition 8. La **différentielle** au point (x,y) d'une application à deux variables f est l'expression $df_{x,y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$.

Les dx, dy et df de l'expression ci-dessous représentent de « petits accroissements » de la fonction et de chacune des variables respectivement. En fait, une bonne définition mathématique de ces objets est de les voir comme des applications de $\mathbb{R}^2$ dans l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Mais comme vous ne savez pas encore ce qu'est une application linéaire, vous vous contenterez du blabla ci-dessous pour tenter de comprendre ce que ça recouvre.

Interprétation géométrique : Comme dans le cas d'une fonction à une variable, on peut tenter d'interpréter géométriquement les notions définies plus haut. Vous savez que, pour une fonction f à une variable, le nombre dérivé $f'(x)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse x. Autrement dit, la tangente étant la droite la plus proche de la courbe, on peut écrire au voisinage de x l'approximation affine suivante : $f(t) \simeq f'(x)(t-x) + f(x)$ (équation de la tangente), ou encore en changeant les notations $f(x+h) \simeq hf'(x) + f(x)$, approximation valable pour des « petites » valeurs de h. En utilisant la notation différentielle, on écrirait ceci ainsi : $df_x(h) = hdx$, c'est-à-dire que l'accroissement de la fonction f (qui correspond à $f(x+h) - f(x)$) est proportionnel à l'accroissement de la variable (qui correspond à h), avec pour coefficient de proportionnalité $f'(x)$.

Dans le cas d'une fonction à deux variables, les dérivées partielles en un point (x,y) représentent également des coefficients directeurs de tangents, en l'occurence des deux tangentes à la surface représentative de f incluses dans les plans verticaus contenant les axes (Ox) et (Oy). La surface admet bien d'autres tangentes (une infinité), mais la connaissance de deux d'entre elle suffit à déterminer le plan tangent à la surface représentative de f, et donc à donner une approximation de $f(x+h; y+k)$ pour des petites valeurs de h et k. C'est ce que fait la différentielle à l'aide de la formule suivante : $f(x+h; y+k) \simeq \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$. Autrement dit (et pour parler en termes plus « économiques »), la différentielle exprime l'accroissement marginal de la fonction f au point (x,y) en fonction des accroissements marginaux de chacune des variables.

Exemple : Un type de fonction à deux variables souvent utilisé en économie est la fonction de Cobb-Douglas, qui modélise la production P en fonction du capital K et du travail L via la formule

$P(K,L) = cK^\alpha L^\beta$. Pour plus de simpliciter, on prend souvent $c = 1$, et $\beta = 1-\alpha$ (avec $\alpha \in [0;1]$), donc $P(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$. Ceci a également pour avantage de rendre la fonction homogène, c'est-à-dire que $P(aK, aL) = aP(K,L)$ (autrement dit, si vous multipliez le capital et le travail simultanément par un même facteur, la production subira la même augmentation).

Les dérivées partielles de cette fonction sont appelés en économie rendements marginaux. En utilisant la notation différentielle, ces rendements marginaux donnent les coefficients d'augmentation marginale de la production quand on augmente marginalement le travail ou le capital. Ainsi, si $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K_0, L_0) = 3$, cela signifie qu'en augmentant de 1% le capital en partant d'une situation où le capital était de K_0 et le travail de L_0, la production augmentera d'environ 3%. Avec l'équation donnée plus haut, on constate que $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K,L) = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha\left(\dfrac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$, et $\dfrac{\partial P}{\partial L}(K,L) = (1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\alpha}$. Si on calcule désormais les dérivées secondes, on obtient notamment $\dfrac{\partial^2 P}{\partial K^2}(K,L) = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha}$; $\dfrac{\partial^2 P}{\partial L^2}(K,L) = -\alpha(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha-1}$. Ces deux expressions sont négatives, c'est un résultat qu'on connait en économie sous le nom de principe des rendements décroissants : plus la production augmente, plus les rendements marginaux sont faibles.

Dernière notion utile en économie et abordée un peu plus haut d'un point de vue mathématique : les lignes de niveau de la fonction P sont appelés isoquants de la fonction de production. Ils représentent des lignes sur lesquelles la production ne varie pas, et on peut donc affirmer que, sur un isoquant, la différentielle dP s'annule. Autrement dit, on a alors $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K,L) + \dfrac{\partial P}{\partial L}(K,L) = 0$. Les rapports entre les deux dérivées partielles en un point d'un isoquant sont appelés coefficients d'elasticité : ils représentent la facilité à échanger du capital contre du travail (ou vice-versa) pour garder une production constante. Ainsi, si on a $\dfrac{\partial P}{\partial L}(K_0, L_0) = -3\dfrac{\partial P}{\partial K}(K_0, L_0)$, cela signifie que, si on diminue le capital de 1% en partant de la situation (K_0, L_0), il faudra augmenter le travail de 3% pour garder le même niveau de production.