Best of EDHEC : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

22 juin 2010

Exercice 1 (EDHEC 2008)

1. (a) La fonction f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur du quotient $\dfrac{1}{1+e^x}$ ne s'annule jamais, et $f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$; $f_n''(x) = \dfrac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \dfrac{-e^x - e^{2x} + 2e^x}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

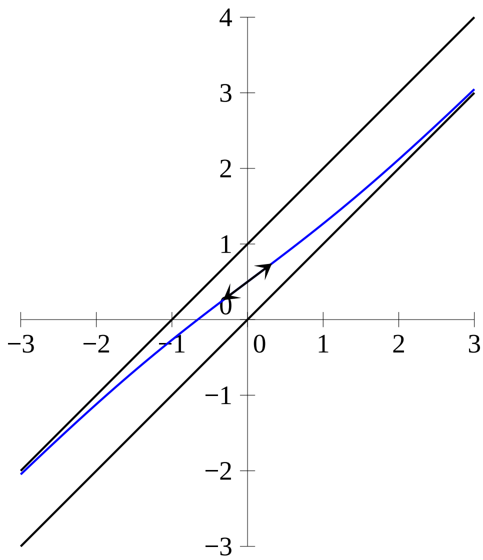
   (b) Au vu de l'expression obtenue pour f'', la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, admettant donc un minimum en 0 de valeur $f'(0) = n - \dfrac{1}{4}$. Comme n est un entier naturel non nul, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et f est bien strictement croissante.

2. (a) Puisque, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

   (b) Puisque $f_n(x) - nx = \dfrac{1}{1+e^x}$, les calculs de limites précédents prouvent que $y = nx$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$, et $y = nx + 1$ en $-\infty$.

   (c) Le seul point d'annulation de f_n'' a pour abscisse 0, et ordonnée $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$.

   (d) Comme $f_1(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f_1'(0) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, la tangente a pour équation $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$. L'allure des différentes courbes est la suivante :



3. (a) La fonction étant strictement croissante et ayant pour limites $-\infty$ et $+\infty$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'équation $f_n(x) = 0$ a donc une seule solution.

(b) On a déjà vu plus haut que $f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$; $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur d'annulation de f_n se trouve donc entre $-\frac{1}{n}$ et 0.

(c) Une application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(d) Puisque u_n converge vers 0, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+e^{u_n}} = \frac{1}{2}$. Or, par définition, $\frac{1}{1+e^{u_n}} = -nu_n$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} -nu_n = \frac{1}{2}$, soit $u_n \sim -\frac{1}{2n}$.

Exercice 2 (EDHEC 2009)

1. (a) Par indépendance des variables X et Y, $P(Z > k) = P(X > k)P(Y > k)$. Or, pour une variable de loi géométrique, $P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{pq^k}{1-q} = q^k$. On en déduit que $P(Z > k) = (q^k)^2 = q^{2k}$.

   (b) En effet, $(Z > k-1) = (Z > k) \cup Z = k$, union disjointe d'évènement, donc $P(Z > k-1) = P(Z > k) + P(Z = k)$, d'où la formule demandée.

   (c) On a donc $P(Z = k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = q^{2(k-1)}(1-q^2)$, ce qui correspond bien à une loi géométrique de paramètre q^2.

2. (a) En effet, si X est paire, $\frac{X}{2}$ est un entier naturel non nul (X prend des valeurs strictement positives), et si X est impaire, $\frac{X+1}{2}$ est entier aussi.

   (b) Pour tout entier strictement positif k, la variable T prend la valeur k quand $X = 2k$.

   (c) Il y a deux possibilités pour avoir $T = k$: soit $X = 2k$, soit $X = 2k-1$ (qui est bien impair). Donc $(T = k) = (X = 2k) \cup (X = 2k-1)$ (union d'évènements disjoints), et $P(T = k) = pq^{2k-1} + pq^{2k-2} = pq^{2k-2}(1+q) = (1-q)(1+q)q^{2(k-1)} = (1-q^2)q^{2(k-1)}$. On retrouve la même loi que pour Z.

3.
```
Program edhec2009 ;
Var x,t,lancer :integer ;
Begin
     Randomize ; x :=0 ;
     Repeat lancer :=random ; x :=x+1 ; until(lancer <=p) ;
     If(x mod 2=0) then t :=x/2 else t :=(1+x)/2 ;
     Writeln(t) ;
End.
```

Exercice 3 (EDHEC 2006)

1. (a) Sans difficulté, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2y - 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + 2x - 1$.

   (b) Il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & 4y & = & 1 \end{array}\right.$. La combinaison $L_1 - 2L_2$ donne $-6y = -1$, d'où $y = \frac{1}{6}$. Symétriquement, $x = \frac{1}{6}$. Il y a donc un unique point critique de coordonnées $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. (a) Encore une fois rien de compliqué : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$.

   (b) On calcule $\Delta = 16 - 4 = 12$. Il y a bien un extrêmum local au point critique, qui est un minimum puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$.

3. (a) Développons donc : $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y^2 - \frac{y}{3} + \frac{1}{36}\right) = 2x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{8} + 2xy - x - \frac{y}{2} + \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{24} = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6}$.

   (b) D'après la question précédente, on a toujours $2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y \geqslant -\frac{1}{6}$, une somme de carrés étant toujours positive. Or, $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$. Puisqu'on a toujours $f(x,y) \geqslant f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, le point critique correspond à un minimum global de f.

4. (a) Il suffit de constater que $g(x,y) = f(e^x, e^y)$ et appliquer le résultat de la question précédente.

   (b) La fonction g atteint la valeur $-\frac{1}{6}$ lorsque $e^x = e^y = \frac{1}{6}$, donc pour $x = y = -\ln 6$.

Problème (EDHEC 2010)

Partie 1 : étude de f.

1. (a) La matrice est $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) On sait que $Im(f) = Vect\left(\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)\right) = Vect\left(\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)\right)$. Ces deux vecteurs n'étant pas proportionnels, ils forment une famille libre et $\dim(Im(f)) =$ 2. Pour déterminer $Ker(f)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x = 0 \\ \frac{1}{3}x = 0 \end{cases}$, ce qui donne sans aucune difficulté $Ker(f) = \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect((0, 1, -1))$. Le noyau de f est donc de dimension 1.

   (c) La base a déjà été donnée à la question précédente. Le réel 0 est donc valeur propre de f, et les vecteurs propres associés sont tous ceux de la forme $(0, y, -y)$ pour $y \neq 0$.

   (d) Il s'agit, pour $\frac{2}{3}$, de résoudre le système $\begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}z \end{cases}$, ce qui donne $x = 2y = 2z$ (la première équation est alors automatiquement vérifiée). Il y a donc des solutions non nulles, $\frac{2}{3}$ est valeur propre avec pour vecteurs propres associés les vecteurs de la forme $(2y, y, y)$, pour $y \neq 0$. De même (le système est très similaire, on obtient comme vecteurs propres pour la valeur propre $-\frac{2}{3}$ les vecteurs $(-2y, y, y)$, avec $y \neq 0$.

(e) L'application f admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

2. (a) On constate que P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $((2,1,1);(-2,1,1);(0,1,-1))$, qui est constituée de vecteurs propres respectifs pour chacune des trois valeurs propres de f (c'est pourquoi il s'agit nécessairement d'une base, d'ailleurs). La matrice $P^{-1}MP$ est donc la matrice de f dans cette base de vecteurs propres, donc $D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) On calcule $PQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Puisque $PQ = 4I$, $P^{-1} = \dfrac{1}{4}Q$.

   (c) C'est la récurrence classique : $PDP^{-1} = M$ par hypothèse, et en supposant la relation vraie au rang j, on a $M^{j+1} = MM^j = PDP^{-1}PD^jP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$.

   (d) On calcule $PD^j = \begin{pmatrix} 2\times(\frac{2}{3})^j & -2\times(-\frac{2}{3})^j & 0 \\ (\frac{2}{3})^j & (-\frac{2}{3})^j & 0 \\ (\frac{2}{3})^j & (-\frac{2}{3})^j & 0 \end{pmatrix}$. En multipliant la matrice précédente par la première colonne de Q et en divisant par 4, on obtient la première colonne de M^j : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}((\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{3})^j) \\ \frac{1}{4}((\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j) \\ \frac{1}{4}((\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j) \end{pmatrix}$. Pour $j = 0$, on obtient une colonne 1 0 0, ce qui correspond à la première colonne de la matrice $M^0 = I$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

1. Puisqu'on tire une boule au hasard parmi 3, $X_1 \sim \mathcal{U}(3)$.

2.
```
Program simul ;
var i,k,X,tirage : integer ;
Begin
    Readln(k) ; X :=random(3)+1 ;
    For i :=2 to k do begin
        tirage :=random(3)+1 ;
        If X=1 then X := tirage ;
        else If tirage <> X then X := 1 ;
    end ;
    Writeln(X) ;
End.
```

3. (a) Si $X_k = 1$, X_{k+1} suit une loi uniforme : $P_{X_k=1}(X_{k+1} = 1) = P_{X_k=1}(X_{k+1} = 2) = P_{X_k=1}(X_{k+1} = 3) = \dfrac{1}{3}$. Si X_k prend la valeur 2 ou 3, on a une chance sur trois de retirer la même boule, donc $P_{X_k=2}(X_{k+1} = 2) = P_{X_k=3}(X_{k+1} = 3) = \dfrac{1}{3}$; et deux chances sur trois d'en tirer un autre, auquel cas on redonne la valeur 1 : $P_{X_k=2}(X_{k+1} = 1) = P_{X_k=3}(X_{k+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$. Enfin, $P_{X_k=2}(X_{k+1} = 3) = P_{X_k=3}(X_{k+1} = 2) = 0$.

   (b) En écrivant la formule des probabilités totales, $P(X_{k+1} = 1) = \dfrac{1}{3}P_{X_k=1} + \dfrac{2}{3}P(X_k = 2) + \dfrac{2}{3}P(X_k = 3)$; $P(X_{k+1} = 2) = \dfrac{1}{3}P(X_k = 1) + \dfrac{1}{3}P_(X_k = 2)$ et $P(X_{k+1} = 3) = \dfrac{1}{3}P(X_k = 1) + \dfrac{1}{3}P(X_k = 3)$, soit une matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Récurrence hyper classique : c'est évidemment vrai pour $k = 0$, et en le supposant vrai au rang k, alors $U_{k+1} = AU_k = A(A^k U_0) = A^{k+1}U_0$.

(d) La vérification est immédiate : $3M + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$. La formule qui suit est une application tout aussi immédiate de la formule du binôme de Newton.

(e) Le premier élément de la colonne vaut, en utilisant la formule précédente,
$\displaystyle\sum_{j=0}^{j=k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M_{11}^j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{j=k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^k \right)$
$\displaystyle = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^k \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right)$ (les simplifications de somme utilisant à nouveau le binôme). Les deux derniers éléments (qui sont égaux), se calculent de la même façon et valent $\displaystyle\frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$. Comme $U_k = A^k U_0$, on en déduit que U_k est identique à la première colonne de A^k, ce qui revient à la loi donnée par l'énoncé pour X_k.

(f) Comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, les limites donnent $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$, et $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} P(X_k = 2) = \lim_{k \to +\infty} P(X_k = 3) = \frac{1}{4}$.

(g) Calculons donc : $\displaystyle E(X_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{4} - \frac{2}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$.

(h) Le plus simple est de faire une boucle pour calculer la puissance :

```
FUNCTION esperance (k :integer) : real;
VAR i : integer; a : real;
BEGIN
a := -1/3;
FOR i := 2 TO k DO a := -a/3;
esperance := (7-3*a)/4;
END;
```