Best of EDHEC

ECE3 Lycée Carnot

17 juin 2010

Exercice 1 (EDHEC 2008)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.
   (b) Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n).
   (c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n).
   (d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1, puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2 (EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$.
   (a) Pour tout entier naturel k, calculer $P(Z > k)$.
   (b) Etablir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a $P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k)$.
   (c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.
2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
   Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
   On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

(b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

(c) Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction de certains évènements $(X = i)$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

3. On rappelle que la fonction random renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0; 1[$.
Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant *pile* avec la probabilité p et calculer la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier *pile* obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
Program edhec2009 ;
Var x,t,lancer :integer ;
Begin
     Randomize ; x :=0 ;
     Repeat lancer :=random ; x :=...... ; until(lancer <=p) ;
     If(x mod 2=0) then .... else.... ;
     Writeln(t) ;
End.
```

Exercice 3 (EDHEC 2006)

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.

   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

   (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

3. (a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.

   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.

   (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geqslant -\frac{1}{6}$.

   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Problème (EDHEC 2010)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par les égalités suivantes : $f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3)$ et $f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$.

Partie 1 : étude de f.

1. (a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (b) Déterminer la dimension de Im f puis celle de Ker f.

(c) Donner alors une base de Ker f, puis en déduire une valeur propre de f ainsi que les vecteurs propres associés.

(d) Vérifier que $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}$ sont aussi valeurs propres de f, et déterminer les vecteurs propres associés.

(e) En déduire que f est diagonalisable.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

   (b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

   (c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$.

   (d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant. On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbf{N}^*$) : soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage. Soit X_k a pris la valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1.

2. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

   On rappelle que `random(n)` renvoie un entier compris entre 0 et `n`-1.

   Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
Program simul ;
var i,k,X,tirage : integer ;
Begin
     Readln(k) ; X :=random(3)+1 ;
     For i :=2 to k do begin
          tirage :=random(3)+1 ;
          If X=1 then X := ----
          else If tirage <> X then X := ---- ;
     end ;
     Writeln(X) ;
End.
```

3. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$.

   (a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.

(b) On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

(c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbf{N}$, on a : $U_k = AU_0$.

(d) Vérifier que $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbf{N}$, on a : $A^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

(e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

(f) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi (c'est-à-dire que les probabilités $P(X_k = i)$ convergent vers $P(X = i)$).

(g) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

(h) Écrire une fonction Pascal, notée `esp`, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.