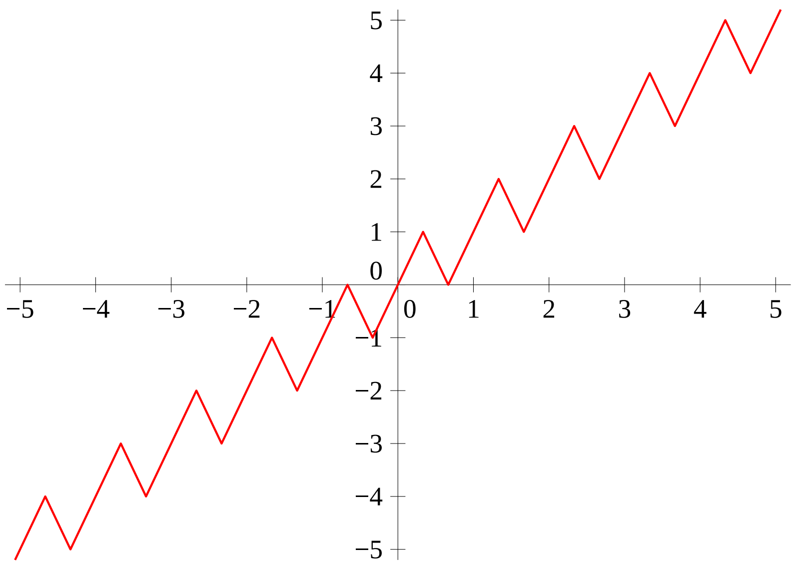
Brainstorm n°4 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 décembre 2009

La réponse à la question posée est la suivante : une telle fonction existe pour toutes les valeurs de n impaires, mais ça ne marche jamais quand n est pair. Voici un exemple de fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle tout réel a exactement trois antécédents :



En effet, tout réel non entier a manifestement trois antécédents par cette fonction continue (deux sur des segments « montants » et un sur un segment « descendant »). Quand aux entiers, ils sont également atteints trois fois : une fois au milieu d'un segment « montant », une fois comme maximum local au bout d'un segment « montant » et une fois comme minimum local au bout d'un segment « descendant ». Il suffit en fait pour que ça marche bien que la valeur de chaque minimum local corresponde à celle d'un maximum local.

On construit assez facilement sur le même modèle des fonctions pour lesquelles chaque réel a 5, 7 ou 9 antécédents, et on généralise ainsi à tous les entiers impairs (il suffit de faire des « vaguelettes » supplémentaires entre deux segments « montants »).

Essayons maintenant de prouver par l'absurde qu'on ne peut pas trouver de fonction convenable pour $n = 2$. Supposons donc qu'une telle fonction f existe. Il existe alors exactement deux réels a et b, avec par exemple $a < b$, tels que $f(a) = f(b) = 0$. La fonction f est alors de signe constant sur chacun des intervalles $]-\infty; a[$, $]a; b[$ et $]b; +\infty[$ (sinon, via le théorème des valeurs intermédiaires, on pourrait trouver un troisième antécédent à 0 sur un de ces intervalles). On sait par ailleurs que $f([a; b])$ est un segment, que nous noterons $[m; M]$, avec donc $m \leqslant 0$ et $M \geqslant 0$. Si on suppose que f est de même signe sur $]-\infty; a[$ et sur $]b; +\infty[$, par exemple positive, elle admet pour minimum global m (si elle est négative sur les deux intervalles, elle a pour maximum global M), ce qui ne nous convient pas du tout puisque cela signifie que tous les réels strictement inférieurs à m n'ont pas d'antécédent par f (alors qu'il sont censés en avoir 2). Supposons donc f de signe opposé sur $]-\infty; a[$ et sur $]b; +\infty[$. Supposons par ailleurs $M > 0$ (M et m ne peuvent pas être tous les deux nuls, sinon f serait constante égale à 0 sur $[a; b]$, donc l'un des deux est non nul, et ça ne change pas grand chose que ce soit m ou M), et notons c un réel dans $]a; b[$ tel que $f(c) = M$. La fonction f prenant des valeurs strictement positives sur un deux intervalles « infinis », par exemple sur $]b; +\infty[$ (elle ne peut pas non plus y être toujours nulle), notons d un réel appartenant à $]b; +\infty[$ tel que $f(d) > 0$. Notons enfin e un réel strictement positif mais strictement inférieur à la fois à M et à $f(d)$ (un tel réel existe certainement, il suffit de prendre le plus petit parmi M et $f(d)$ et de le diviser par 2). En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $[a; c]$, $[c; b]$ et $[b; d]$, on peut trouver trois réels distincts (un dans chaque intervalle ouvert) qui sont tous des antécédents de e. Cela contredit notre hypothèse sur f et achève le raisonnement par l'absurde.

Les plus courageux d'entre vous pourront entreprendre un raisonnement similaire dans le cas où $n = 4$ (il y a un peu plus de cas à regarder mais l'idée reste la même). Prouver qu'on ne peut pas trouver de fonction convenable en général quand n est pair nécessite un peu plus de connaissances que ce que vous avez à disposition pour l'instant.