# Brainstorm n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

5 février 2010

## Bizarre, vous avez dit bizarre ?

1. Si on a aucune information, la probabilité d'avoir deux filles est naturellement $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Si on sait que l'aîné est une fille, la probabilité qu'il y ait deux filles vaut $\frac{1}{2}$, c'est la probabilité que le deuxième enfant soit une fille. Pour le dernier cas, il vaut mieux préciser ce qu'on calcule : notons $A$ l'évènement « Les deux enfants sont des filles » et $B$ « Au moins un enfant est une fille ». On cherche à calculer $P_B(A)$. Utilisons la formule de Bayes, on a $P(A) = \frac{1}{4}$ (cf ci-dessus), $P(B) = \frac{3}{4}$ (sur les quatre cas possibles, un seul ne réalise pas $B$, c'est celui où il y a deux garçons), et bien sûr $P_A(B) = 1$ (s'il y a deux filles, il y a certainement au moins une fille !). On a donc $P_B(A) = \frac{\frac{1}{4} \times 1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$. Étonnant, non ?
2. Le candidat a tout intérêt à changer. En effet, s'il ne change pas, il a une chance sur trois de gagner (le fait que l'animateur ait exclu une porte ne change rien). Mais s'il change, il va gagner deux fois sur trois : s'il avait deviné avant de changer (une chance sur trois), il va se mordre les doigts. Mais s'il s'était trompé au départ (deux chances sur trois), peu importe laquelle des deux mauvaises portes il a choisie, l'animateur vient de lui supprimer l'autre mauvaise porte (il n'a pas eu le choix) et il est donc certain d'empocher le lot en changeant d'avis. Une autre façon de voir les choses : si le candidat perd sans changer, il aurait nécessairement gagné en changeant. La proba de gagner en changeant est donc complémentaire de celle de gagner sans changer, donc égale à $\frac{2}{3}$.
3. Là, c'est nettement plus subtil. Le problème est en fait que vous ne pouvez pas avoir n'importe quelle somme dans chaque enveloppe, ou du moins pas toujours avec la même probabilité. Supposons par exemple que les seuls montants acceptés soient de 1 à 50 euros pour l'enveloppe contenant le plus petit montant et donc de 2 à 100 euros pour l'autre, avec proba $\frac{1}{50}$ d'avoir chaque montant. Dans ce cas, si vous avez par exemple un montant de 60 euros dans l'enveloppe, vous savez que c'est l'enveloppe la plus intéressante et le raisonnement n'a plus de sens. Si les montants ne sont pas limités, on ne pourra donner la même probabilité à chaque montant possible (cela devra diminuer avec le montant) et on saura, si on tire un gros montant dans notre enveloppe, qu'il y a de plus grandes chances que ce soit la meilleure enveloppe. Ceci dit, le paradoxe reste très perturbant du point de vue du cobaye, qui lui ne sait pas quels sont les montants possibles, ni la répartition des probabilités...
4. Quelle est la probabilité que l'avion à deux moteurs s'écrase ? Notons $A_1$ : « Le premier moteur tombe en panne » et $A_2$ : « Le deuxième moteur tombe en panne ». O cherche à calculer $P(A_1 \cup A_2)$. Comme les deux moteurs sont indépendants, $P(A_1 \cap A_2) = p^2$, donc $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 2p - p^2$. Dans le cas de l'avion à quatre moteurs, la probabilité que

deux moteurs fixés (le premier et le deuxième par exemple) tombent en panne vaut $p^2(1-p)^2$ ($1-p$ représentant la probabilité que le troisième et le quatrième moteurs ne tombent pas en panne). Comme il y a $\binom{4}{2} = 6$ couples de moteurs possibles pouvant tomber en panne, cela donne une probabilité de $6p^2(1-p)^2$ que deux moteurs éxactement tombent en panne. Pour trois moteurs en panne exactement, la proba vaut $4p^3(1-p)$ (le facteur 4 pour le choix du moteur qui tient le coup), et pour quatre moteurs en panne, elle est naturellement de $p^4$. Cela laisse une probabilité que notre avion s'écrase de $6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4$. Pour comparer cette expression à celle obtenue pour le bimoteur, le plus simple est de faire leur différence et d'en chercher le signe : $f(p) = 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 - 2p + p^2 = 6p^2 - 12p^3 + 6p^4 + 4p^3 - 4p^4 + p^4 - 2p + p^2 = 3p^4 - 8p^3 + 7p^2 - 2p = p(3p^3 - 8p^2 + 7p - 2)$. Ce polynome a pour racine évidente 1 (ce qui est tout à fait normal puisque si $p = 1$, les deux avions ont la même probabilité de s'écraser !), donc $f(p) = p(p-1)(ap^2 + bp + c) = p(ap^3 + (b-a)p^2 + (c-b)p - c)$. En identifiant avec l'expression précedente, on obtient $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$. Ne reste plus qu'à déterminer les racines du trinôme $3p^2 - 5p + 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet deux racines $p_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$ et $p_2 = \frac{5+1}{6} = 1$. Un petit tableau de signe permet finalement d'obtenir que $f(p) \neq 0$ si $p \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ et $f(p) \geq 0$ si $p \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. Autrement dit, il vaut mieux prendre l'avion à quatre moteurs si $p \leq \frac{2}{3}$. Si $p \geq \frac{2}{3}$, il vaut de toute façon mieux renoncer à son voyage !