Brainstorm n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

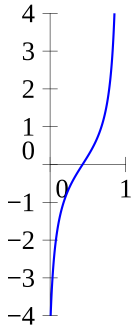
14 octobre 2009

Des histoires de bijection

1. Il suffit de considérer l'application $f : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ (f est bien à valeurs dans B : si on ajoute 1 à un entier naturel pair, on obtient toujours un entier naturel impair). Cette application est manifestement injective (si $n+1 = n'+1$, alors $n = n'$), et également surjective puisque si on considère un entier p dans B, $p-1$ est toujours un entier naturel pair, et est un antécédent de p. L'application f est donc une bijection.
2. Encore une fois, une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans A, qu'elle est injective et surjective, donc bijective.
3. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci parait relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geq 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2} \Rightarrow n = n'$, et $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2} \Rightarrow n = n'$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geq 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p-1$ est un antécédent de p. Finalement, f est bien bijective.
4. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation diagonale par diagonale : on pose $f(0) = (0;0)$, puis $f(1) = (0;1)$ et $f(2) = (1;0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0;2)$, $f(4) = (1;1)$ et $f(5) = (2;0)$ etc. Le couple $(p;q)$ se trouve sur la diagonale numéro $p+q$, il est même le $(p+1)$ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1+2+\cdots+(p+q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ éléments. Autrement dit, on a $f(n) = (p;q)$ pour $n = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ (commence à numéroter à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p+1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).
5. En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples

correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1;1)$ mais pas au couple $(2;2)$, ni à $(3;3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc d'admettre que le résultat est effectivement raisonnable.

6. Pour le fait que $\mathbb{N}$ n'est pas équipotent à $\mathbb{R}$, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f, qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0, \dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale !), comme deuxième décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2, comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2, x_3, et de tous les x_i. Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f, qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».
7. C'est très très bête, puisqu'il suffit de constater que la fonction $f : x \mapsto 10x$ effectue une bijection de $[0;1]$ sur $[0;10]$, ce qui est à peu près évident (sa réciproque est $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{x}{10}$.
8. Là, c'est un peu plus compliqué, et j'aurais nettement mieux fait de vous faire chercher une bijection de $]0;1[$ (intervalle ouvert, donc) dans $\mathbb{R}$ (le fait de rajouter les points 0 et 1 ne change en fait essentiellement rien). Une fonction dont la représentation graphique ressemble à ceci est un candidat parfait à ce rôle :



9. Dessinez le demi-cercle sur une feuille, la droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP). Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle).