Brainstorm n°3 : Y a-t-il plus de points dans un cercle ou dans une droite ?

ECE3 Lycée Carnot

compte-rendu le 14 octobre 2009

Des histoires de bijection

Mais qu'est-ce que c'est encore que cette histoire et ce titre étrange ? Voilà le problème : autant quand on parle d'ensembles finis, le concept d'avoir « autant d'éléments » dans deux ensembles est assez simple à comprendre, autant pour des ensembles infinis, c'est nettement plus compliqué. La seule façon raisonnable de procéder est de dire que deux ensembles (infinis) E et F sont **équipotents** s'il existe une bijection entre E et F (dans un sens ou dans l'autre, peu importe, puisque s'il en existe une de E vers F par exemple, la réciproque de cette application sera une bijection de F vers E). Le résultat (peut-être un peu surprenant) qui justifie cette définition est que tous les ensembles infinis ne sont pas équipotents. Autrement dit, même parmi les ensembles infinis, il y en a qui ont « plus d'éléments » que d'autres. Eh oui, il y a des infinis plus grands que d'autres, et le but de cette séance est d'essayer de faire un peu de tri là-dedans. Attention, les résultats que nous allons essayer de démontrer ne sont pas forcément très intuitifs...

1. On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair}\}$. Montrer que A et B sont équipotents en construisant une bijection entre A et B (jusque-là, tout va bien, il parait normal qu'on ait autant d'entiers pairs que d'entiers impairs).
2. Montrer maintenant que A est équipotent à $\mathbb{N}$ tout entier (en fait, il y a autant d'entiers pairs que d'entiers tout court !).
3. Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents (autant d'entiers relatifs que de positifs).
4. Plus dur : montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents (autant d'entiers que de couples d'entiers !).
5. Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.
6. Bon, vous allez me dire « en fait, tout le monde est équipotent à $\mathbb{N}$, c'est nul votre truc ». Eh bien non, $[0;1]$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$. Vous pouvez essayer de le montrer mais c'est beaucoup plus dur que ce qui précède.
7. Montrer par contre que $[0;1]$ et $[0;10]$ sont équipotents.
8. Tant qu'on y est, montrer que $[0;1]$ et $\mathbb{R}$ tout entier sont équipotents.
9. Pour finir, montrer qu'un cercle et une droite sont équipotents (vous pouvez faire avec un demi-cercle et une droite, c'est plus facile).