Brainstorm n°2 : corrigé du professeur

ECE3 Lycée Carnot

23 septembre 2009

Le jeu des craies

Je vais passer directement au cas où n craies sont alignées et chercher en fonction de n qui de celui qui débute le jeu (que nous appellerons désormais élève) ou de celui qui joue en deuxième (dénommé prof) va gagner si chacun des deux joueurs joue au mieux. Commençons donc par regarder ce qui se passe pour de petites valeurs de n :

- si $n = 1$, le pauvre élève est foutu avant même que le jeu ne commence. **Le prof gagne donc**.
- si $n = 2$, l'élève va brillament prendre une craie et laisser le prof perdre. **L'élève gagne**.
- si $n = 3$, l'élève prend deux craies. **L'élève gagne**.
- si $n = 4$, l'élève prend troies craies. **L'élève gagne**.
- si $n = 5$, l'élève a le choix entre prendre une craie et en laisser quatre au prof (qui gagne d'après le cas $n = 4$), en prendre deux et en laisser trois au prof (qui gagne encore), ou en prendre trois et en laisser deux au prof (qui gagne toujours). Dans tous les cas, **le prof gagne**.
- si $n = 6$, l'élève n'a qu'à prendre une craie et laisser le prof jouer avec cinq craies en face de lui, cas où on vient de voir qu'il est cuit quoi qu'il fasse. **L'élève gagne**.
- si $n = 7$, l'élève prend deux craies et ramène le prof à $n = 5$, **l'élève gagne**.
- si $n = 8$, l'élève prend troies craies et ramène le prof à $n = 5$, **l'élève gagne**.
- si $n = 9$, que l'élève prenne une, deux ou trois craies, il ramène le prof à un des trois cas précédents et perd. **Le prof gagne**.

Bref, si vous avez compris comment ça marche, vous commencez à vous doutez que le prof gagnera une fois sur quatre, plus précisément quand n est un multiple de quatre plus un. Pour le prouver, une seule méthode : la récurrence ! Mais on peut la présenter de différentes façons. Je vais le faire avec une récurrence quadruple car c'est assez simple à rédiger (une récurrence triple est en fait suffisante). Notons donc P_n : si $n = 4p+1$ alors le deuxième joueur gagne le jeu à n craies, sinon c'est le premier à jouer qui gagne. Les propositions P_1, P_2, P_3 et P_4 ont été vérifiées plus haut. Supposons désormais $n \geqslant 5$ et supposons également P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3} et P_{n-4} vraies. Considérons alors le jeu à n craies. Si $n = 4p+1$, alors $n-1$, $n-2$ et $n-3$ ne sont pas multiples de quatre plus un, et quel que soit son choix initial le premier joueur va devoir laisser le deuxième jouer dans une position gagnante (par hypothèse de récurrence). Dans ce cas, P_n est vérifiée. Et si n n'est pas de la forme $4p+1$, alors l'un des trois entiers précédents, lui, l'est ! Le premier joueur n'a alors qu'à prendre le nombre de craies adéquates pour placer le deuxième dans la position perdante correspondante, et P_n est également vraie. Par principe de récurrence, P_n est donc vraie quel que soit l'entier n.

Note : La bonne tactique pour le premier joueur est donc la suivante : il commence par prendre (s'il le peut) un nombre de craies qui ramène le total à un multiple de quatre plus un. Ensuite, à chaque fois que son adversaire prend une craie, il en prend trois ; s'il en prend deux, il en prend aussi deux ; et s'il en prend trois, lui en prend une. Dans tous les cas, ils auront pris à eux deux quatre craies, et le nombre total de craies reste un multiple de quatre plus un. À force de diminuer, il finira par être égal à un, et le deuxième joueur perdra.