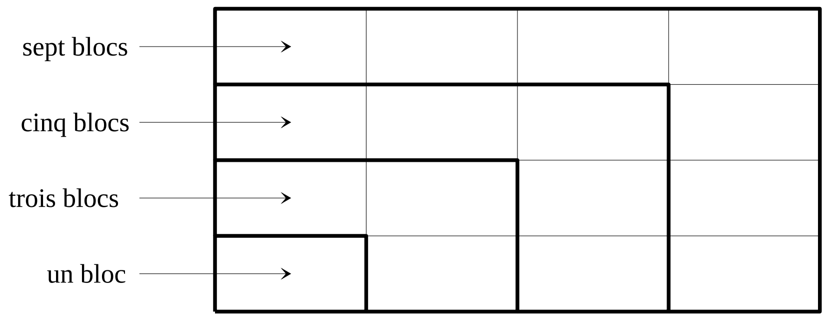
Brainstorm n°1 : corrigé du professeur

ECE3 Lycée Carnot

15 septembre 2009

Une histoire de frontons

L'énoncé nous demande en fait de trouver une façon de calculer la somme des n premiers entiers naturels impairs. Si l'on est un peu curieux et qu'on regarde ce que ça donne pour les premières valeurs de n (c'est toujours un bon réflexe de faire des essais de ce genre) on obtient 1, puis $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, $1+3+5+7+9=25$ etc. Un oeil attentif aura remarqué que les résultats ressemblent étrangement aux carrés des premiers entiers. Reste à prouver que pour un fronton à n niveaux on aura effectivement besoin de n^2 blocs. Il existe pour cela une quantité de méthodes (notamment la récurrence), mais une simple figure suffit à se convaincre :



Mission Cléopâtre

Le nombre de blocs sur les premiers niveaux est donc 2, 5, $2+5=7$, $2+5+7=14$, $2+5+7+14=28$ etc. En fait, si on note le B_n le nombre de blocs du n-ième niveau, on a pour $n \geq 4$, $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + \cdots + B_1 = B_{n-1} + B_{n-1} = 2B_{n-1}$. Le nombre total de blocs est donc, en regroupant les deux premiers niveaux, de $7+7+14+28+\cdots = 7(1+1+2+2^2+\cdots+2^{66})$. Il ne reste plus qu'à réussir à calculer la parenthèse. Notons $A = 1+2+2^2+\cdots+7^{66}$, et constatons que $2A = 2+2^2+2^3+\cdots+2^{67}$, donc $A = 2A-A = 2+2^2+\cdots+2^{67}-1-2-2^2-\cdots-2^{66} = 2^{67}-1$. On en déduit que le nombre de blocs dans la pyramide vaut $7 \times 2^{67} \simeq 10^{21}$ blocs, soit un poids de 10^{24} kg. Sachant que la masse total de notre bonne vieille Terre est d'environ 6×10^{24} kg, Numérobis est dans un très gros pétrin. Pas sûr qu'invoquer de puissants mages gaulois suffise à le tirer d'affaire...