

Applications linéaires

ECE3 Lycée Carnot

17 juin 2010

1 Aspect vectoriel

1.1 Définition et exemples

Définition 1. Soient E et F deux espace vectoriels, une **application linéaire** de E dans F est une application $u : E \rightarrow F$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall(x, y) \in E^2, u(x + y) = u(x) + u(y)$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, u(\lambda x) = \lambda u(x)$

Remarque 1. Une application $u : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(x, y) \in E^2, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$. Autrement dit, une application est linéaire si elle est compatible avec les combinaisons linéaires. On a d'ailleurs plus généralement, pour une application linéaire,

$$u\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i u(e_i).$$

Exemples : Bien que les conditions définissant une application linéaire soient assez restrictives, on peut trouver des exemples extrêmement variés dans les différents espaces vectoriels que nous avons étudiés au chapitre précédent.

- L'application $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y) = (2x - 3y, 4x + y, -x + 2y)$ est une application linéaire.
- L'application $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y) = (2x - 3, 4 + y, -x + 2y)$ n'est pas une application linéaire (on peut constater par exemple qu'en général $u(2x, 2y) \neq 2u(x, y)$).
- L'application $u : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = AM$ est une application linéaire, quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- L'application $u : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = M^2$ n'est pas une application linéaire (en général, $(M + N)^2 \neq M^2 + N^2$).
- Soit E l'ensemble des suites réelles. L'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(u_n) = (u_0, u_8, u_{35})$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . L'application $u : E \rightarrow E$ définie par $u(f) = f'$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0; 1]$. L'application $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(f) = \int_0^1 f(t)dt$ est une application linéaire.

Définition 2. Une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est aussi appelée **morphisme** de E dans F . On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F .

Une application linéaire $u : E \rightarrow E$ est appelée **endomorphisme** de l'espace vectoriel. On note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Une application linéaire bijective est appelée **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes d'un ev E dans lui-même est parfois noté $GL(E)$.

1.2 Noyau, image d'une application linéaire

Définition 3. Le **noyau** d'une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est l'ensemble $\text{Ker}(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$.

Remarque 2. Les lettres Ker sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.

Proposition 1. Si $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire, alors $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. En effet, si $(x, y) \in \text{Ker}(u)^2$, on a $u(x) = u(y) = 0$, donc $u(x+y) = u(x) + u(y) = 0$, d'où $x + y \in \text{Ker}(u)$. De même, si $x \in \text{Ker}(u)$, $u(\lambda x) = \lambda u(x) = 0$ donc $\lambda x \in \text{Ker}(u)$. De plus, le vecteur nul appartient toujours au noyau de u . En effet, soit $x \in E$, on a $u(x) = u(x+0) = u(x) + u(0)$, donc $u(0) = u(x) - u(x) = 0$. \square

Remarque 3. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on est en fait amené à déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires homogènes (on verra plus loin qu'une application linéaire s'écrit toujours sous forme de combinaisons linéaires des coordonnées).

Exemple : Déterminons le noyau de l'endomorphisme u de \mathbb{R}^3 défini par $(x, y, z) \mapsto (x - y + z, 3x - 2y + 5z, -x - 3z)$. Les éléments du noyau sont les triplets de réels (x, y, z) solutions du système
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \\ -x - 3z = 0 \end{cases}$$
. Le système n'est pas de Cramer ($2L_1 - L_2 = L_3$), les solutions sont

les triplets de la forme $(-3z, -2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}$. Autrement dit, le noyau de u est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de \mathbb{R}^3 , dont une base est constituée du vecteur $(-3, -2, 1)$.

Proposition 2. Une application linéaire est injective si et seulement si $\text{Ker}(u) = \{0\}$.

Démonstration. Supposons d'abord le noyau réduit au vecteur nul et montrons que u est injective : soient $(x, y) \in E^2$ tels que $u(x) = u(y)$, alors $u(x - y) = u(x) - u(y) = 0$, donc $x - y \in \text{Ker}(u)$, donc $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$, ce qui prouve bien l'injectivité. Réciproquement, supposons u injective, alors 0 a un seul antécédent par u . Or, le vecteur nul, on l'a vu, est toujours un antécédent de 0 par une application linéaire. Ceci prouve bien qu'il est le seul élément de E à appartenir à $\text{Ker}(u)$. \square

Définition 4. L'**image** d'une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est $\text{Im}(u) = \{y \in F \mid \exists x \in E, u(x) = y\}$.

Proposition 3. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors u est surjective si et seulement si $\text{Im}(u) = F$.

Démonstration. Pas de démonstration, puisque c'est la définition d'une application surjective. \square

Proposition 4. L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. Rien de bien difficile. L'image contient le vecteur nul, puisque $u(0) = 0$. Si $y \in \text{Im}(u)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $y = u(x)$, donc $u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda y$, donc $\lambda y \in \text{Im}(u)$. De même, si y et y' sont dans l'image de u , $y = u(x)$ et $y' = u(x')$, donc $u(x + x') = y + y'$, qui est donc dans l'image. \square

Proposition 5. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F et (e_1, \dots, e_n) une base de E , alors $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Démonstration. Comme les vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_n)$ appartiennent à $\text{Im}(u)$, on a nécessairement $\text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \subset \text{Im}(u)$. De plus, soit $y \in \text{Im}(u)$, on a $y = u(x)$, et comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. On a alors $y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i)$, donc $y \in \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$, et les deux ensembles sont bien égaux. \square

Remarque 4. Attention, en général, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ n'est pas une base de $Im(u)$, mais seulement une famille génératrice.

Exemple 1 : La méthode élémentaire pour calculer une image est d'utiliser la définition. Prenons par exemple l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 définie par $u(x, y) = (2x - y, x + 2y, -2x + y)$. Un triplet (a, b, c) appartient à $Im(u)$ si et seulement si le système

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ x + 2y = b \\ -2x + y = c \end{cases}$$

admet une solution. Les membres de gauche des deux équations extrêmes étant opposés, il faut nécessairement avoir $a = -c$, et on vérifie facilement que cette condition est suffisante. On a donc $Im(u) = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 0, -1); (0, 1, 0))$.

Exemple 2 : En pratique, on utilisera plutôt notre dernière proposition, car c'est beaucoup plus rapide! Reprenons le même exemple. La base canonique de \mathbb{R}^2 est constituée des deux vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$, donc l'image est engendrée par $u(1, 0) = (2, 1, -2)$ et $u(0, 1) = (-1, 2, 1)$. On a donc $Im(u) = Vect((2, 1, -2); (-1, 2, 1))$ (ce ne sont pas les mêmes vecteurs que tout à l'heure mais on peut vérifier qu'ils engendrent le même espace vectoriel).

2 Aspect matriciel

Dans la mesure où la donnée des images des vecteurs d'une base suffit à déterminer complètement une application linéaire, il peut être tentant et pratique de représenter celles-ci par une matrice, via le petit calcul suivant : soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base l'ev E (supposé de dimension n), et (f_1, f_2, \dots, f_p) une base de F , supposé donc de dimension p . Si $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire, on peut écrire, pour tout x de E , $u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i\right)$, où les réels x_i sont les coordonnées de x dans la

base choisie, puis $u(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{j=1}^{j=p} a_{i,j} e_j = \sum_{j=1}^{j=p} \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} x_i\right) e_j$, où le coefficient $a_{i,j}$ représente la i -ème coordonnée du vecteur e_j dans la base (f_1, \dots, f_p) . Cette dernière expression fait fortement penser à un produit de matrices (mais si, je vous assure), ce qui amène les définitions suivantes :

Définition 5. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F . La **matrice représentant u dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'** est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont la i ème colonne est composée des coordonnées de $u(e_i)$ dans la base \mathcal{B}' . Autrement dit, si $u(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$, alors $M_{i,j} = \lambda_i$.

Exemple : Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y, z) = (4x - 3y + z, -2x + y - 5z)$, la matrice de u dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Définition 6. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et \mathcal{B} une base de E . On note souvent $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base \mathcal{B} (c'est-à-dire que la base de départ est la base \mathcal{B} et celle d'arrivée également).

Proposition 6. En gardant les notations précédentes, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice-colonne

des coordonnées dans \mathcal{B} d'un élément $x \in E$ et $u(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ celle des coordonnées de son image dans \mathcal{B}' , alors $u(X) = MX$, où M est la matrice représentant u dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

Démonstration. En effet, on a $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$, et par définition de la matrice M , on a $u(e_i) = \sum_{j=1}^n M_{ji} f_j$.

On a donc $u(X) = \sum_{i=1}^p x_i \sum_{j=1}^n M_{ji} f_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p x_i M_{ji} \right) f_j$. Or, l'unique terme de la j ème ligne de la matrice colonne MX vaut précisément $\sum_{i=1}^p x_i M_{ji}$, donc l'égalité demandée est bien vérifiée. \square

Proposition 7. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et M la matrice de u dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , alors la matrice de λu dans ces mêmes bases est λM .

De même, si $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, et M, N leurs matrices respectives, la matrice de $u + v$ est $M + N$. Plus intéressant, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, et M, N leurs matrices respectives, alors la matrice de $v \circ u$ est NM .

Démonstration. En effet, si $u(X) = MX$ et $v(X) = NX$, $\lambda u(X) = \lambda MX$; $u(X) + v(X) = MX + NX = (M + N)X$ et, lorsque cela a un sens, $v \circ u(X) = v(MX) = NMX$. \square

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z)$, et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$. Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les bases canoniques sont $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $v \circ u(x, y, z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$.

Proposition 8. Un endomorphisme est bijectif (on dit aussi inversible) si et seulement si sa matrice M dans les bases canoniques l'est. Dans ce cas, u^{-1} est également une application linéaire, et sa matrice est M^{-1} .

Démonstration. En effet, si u est bijective, u^{-1} est bien défini et $\forall X \in E, u^{-1}(u(X)) = X$. L'application u^{-1} est alors linéaire : si Y_1 et Y_2 sont deux éléments de E , ils ont des antécédents X_1 et X_2 par u , et $X_1 + X_2$ est alors un antécédent de $Y_1 + Y_2$ donc $u^{-1}(Y_1 + Y_2) = X_1 + X_2$. Le cas du produit par un réel se montre de façon très similaire. Soit alors N la matrice de u^{-1} dans la base canonique, comme $u^{-1} \circ u = u \circ u^{-1} = id$ (on parle ici de l'application identité et pas de la matrice du même nom), on a en utilisant la proposition précédente $NM = MN = I$ (la matrice de l'identité dans les bases canoniques est I), donc $N = M^{-1}$. \square

Pour conclure cet ultime chapitre de l'année, quelques mots sur des notions que vous reverrez nettement plus en détail l'an prochain, puisque l'algèbre linéaire sera une part importante de votre programme, et la diagonalisation la notion centrale de ce chapitre.

Définition 7. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Un réel λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Tous les vecteurs vérifiant cette équation sont appelés **vecteurs propres** de u associés à la valeur propre λ .

Exemple : Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par $u(x, y) = (2x + y, -3x - 2y)$. Dans la base canonique, u a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. On peut constater que 1 est valeur propre de u , avec comme vecteur propre associé (par exemple) $(1, -1)$; -1 est également valeur propre de u avec comme vecteur propre associé $(1, -3)$ puisque $u(1, -3) = (-1, 3) = -1(1, -3)$. La famille

constituée des deux vecteurs propres $((1, -1); (1, -3))$ est une base de \mathbb{R}^2 (les vecteurs ne sont pas proportionnels). L'intérêt de ce calcul de vecteurs propres vient du fait que la matrice de u dans cette nouvelle base devient nettement plus simple. En effet, elle s'écrit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vous verrez l'an prochain que des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes forment toujours une famille libre, et que la matrice de u dans une base formée de vecteurs propres est toujours diagonale (comme dans cet exemple). Nous allons d'ailleurs achever le chapitre en indiquant le lien entre la diagonalisation des endomorphismes et celle des matrices vue dans un chapitre précédent.

Définition 8. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si on peut trouver une base de E constituée de vecteurs propres pour u .

Définition 9. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E . La matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' est la matrice $P = (p_{i,j})$, où le coefficient $p_{i,j}$ correspond à la i -ème coordonnée de f_j dans la base \mathcal{B} .

Proposition 9. Une matrice de passage est toujours inversible. De plus, si $u \in \mathcal{L}(E)$, en notant A et A' ses matrices respectivement dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , on a la relation $A' = P^{-1}AP$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. La matrice de passage de la base canonique à la base $((1, -1); (1, -3))$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. On calcule aisément $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, comme prévu. Vous savez donc maintenant d'où viennent ces drôles de calcul à base de PMP^{-1} qu'on effectue depuis des semaines sur les matrices. La suite ... en septembre, mais ce ne sera plus avec moi!