Ensembles et applications

ECE3 Lycée Carnot

zoinx

Les ensembles sont les objets les plus basiques que l'on puisse manipuler en mathématiques. En effet, tout objet mathématique est un ensemble, auquel on ajoute éventuellement d'autres propriétés qui en font une fonction, une matrice ou plus simplement un entier (oui, un entier est un ensemble comme un autre, même si je ne m'étendrai pas là-dessus ici). Et pourtant, on ne définit jamais ce qu'est un ensemble mathématique. En effet, la notion d'ensemble est tellement élémentaire qu'on ne peut pas s'appuyer sur une autre notion pour la décrire.

1 Ensembles

Définition 1. Un **ensemble** E est une collection d'objets. On peut définir un ensemble mathématique en nommant tous les objets le constituant, par exemple $E = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ ou en les caractérisant par une propriété commune, par exemple $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leqslant n \leqslant 8\}$. Ce deuxième type de définition fait souvent intervenir un autre ensemble.

Définition 2. Deux ensembles sont **égaux** s'ils sont constitués des mêmes éléments. Un ensemble E est **inclus** dans un ensemble F si tous les éléments de E appartiennent à F, ce qu'on note $E \subset F$. On dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F, et on parle de **sous-ensemble propre** lorsqu'en plus $E \neq F$ (on peut également noter $E \subsetneq F$ pour un sous-ensemble propre).

Remarque 1. Pour prouver que $E \subset F$, on considère généralement un élément quelconque de E, et on essaie de prouver qu'il appartient à F. Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on procèdera souvent par double inclusion : on prouve séparément $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition 3. L'ensemble ne contenant aucun élément, appelé **ensemble vide**, est noté $\emptyset$.

Définition 4. Soient A et B deux ensembles inclus dans un même ensemble E. On définit la réunion de A et de B par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A\,\textbf{ou}\,x \in B\}$; et l'intersection de A et de B par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A\,\textbf{et}\,x \in B\}$.

Remarque 2. On peut très bien définir des unions ou intersections de plus de deux ensembles, qu'on notera souvent en utilisant une variable muette comme pour les sommes et les produits. On peut même avoir des unions ou intersections infinies, par exemple, $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[= \{0\}$. En général, $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$ et $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$.

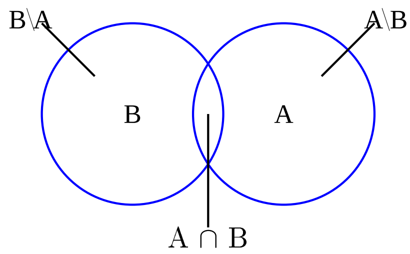
Proposition 1. Les propriétés élémentaires sur les opérations de réunion et d'intersection sont les suivantes :

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc noter $A \cup B \cup C$).
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc noter $A \cap B \cap C$).
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration. L'associativité des deux opérations (les deux premières propriétés) est évidente. L'ensemble $A \cup B \cup C$ est simplement constitué des éléments appartenant à un (au moins) des trois ensembles A, B et C, ceci ne dépend absolument pas de l'ordre dans lequel on fait les réunions. De même pour l'intersection.

Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Soit $x \in A \cap (B \cup C)$, cela signifie que $x \in A$ et soit $x \in B$, soit $x \in C$. Dans le premier cas, $x \in A \cap B$, dans le deuxième $x \in A \cap C$, donc dans les deux cas $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, et la première inclusion est vraie. Dans l'autre sens, si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, on a soit $x \in A \cap B$, soit $x \in A \cap C$. Dans les deux cas, $x \in A$, et x appartient à l'un des deux ensembles B et C, donc $x \in A \cap (B \cup C)$, ce qui montre la deuxième inclusion. La deuxième propriété de distributivité se montre de façon similaire. $\square$

Définition 5. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. On définit le **complémentaire** de A dans E par $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Plus généralement, si B est un autre sous-ensemble de E, on peut définir le complémentaire de A dans B (aussi appelé différence de B et de A) par $B \backslash A = \{x \in B \mid x \notin A\}$.



Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ et $A = [-3; 5]$, alors $\overline{A} =]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$.

Proposition 2. Lois de Morgan. Deux propriétés symétriques à retenir :
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration. Ne pas appartenir à A ou à B est équivalent à n'appartenir ni à A, ni à B. C'est juste ceci que retranscrit la première loi de Morgan. La deuxième est similaire. $\square$

Définition 6. Une **partition** d'un ensemble E est un ensemble de sous-ensembles A_1, ..., A_n de E vérifiant $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall (i, j) \in \{1; \dots; n\}^2$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Autrement dit, tout élément de E appartient à un et un seul des ensembles A_i.

Exemple : Si on note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair }\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair }\}$, les ensembles A et B forment une partition de $\mathbb{N}$.

Remarque 3. On peut en fait définir de même la notion de partition infinie.

Définition 7. Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F est l'ensemble constitué de tous les couples d'éléments (x, y), avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$.

Remarque 4. Les notations sont très importantes : l'ensemble $\{2; 3\}$ est constitué de deux éléments (les entiers 2 et 3), alors que l'ensemble $\{(2, 3)\}$ est constitué d'un seul élément, la paire d'entiers $(2, 3)$.

Remarque 5. Encore une fois, on généralise facilement à plus de deux ensembles.

Remarque 6. Lorsque $E = F$, on note E^2 plutôt que $E \times E$, et plus généralement
$\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$.

Définition 8. L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$.

2 Applications

Une application est un cas particulier de ce que vous avez l'habitude d'appeler une fonction. La différence est qu'une application doit être définie sur tout son ensemble de départ, alors qu'on parle par exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la fonction inverse (mais on peut très bien parler de l'application inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$).

Définition 9. Une **application** f est la donnée d'un ensemble E, appelé ensemble de départ de l'application, d'un ensemble F appelé ensemble d'arrivée, et pour chaque élément x de E, d'un unique élément de F noté $f(x)$. On appelle $f(x)$ **image** de l'élément x par f, et si $y \in E$, les éléments x de E vérifiant $f(x) = y$ sont appelés **antécédents** de y par f (un élément y peut très bien ne pas avoir d'antécédent, ou au contraire en avoir plusieurs).

Exemple : L'application $x \rightarrow x$, définie sur un ensemble quelconque E, est appelée application identité, souvent notée id (ou id_E si on veut bien préciser l'ensemble de départ). La fonction $x \mapsto \dfrac{3}{x-2}$ est une application de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 7. Deux applications sont identiques si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et envoient un même élément sur une même image. Par exemple, les fonctions d'une variable réelle $f : x \mapsto x - 4$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ sont différentes, même si elles coïncident sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: elles n'ont pas le même ensemble de définition.

Définition 10. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et E' un sous-ensemble de E. L'application $g : E' \rightarrow F$ définie par $\forall x \in E'$, $g(x) = f(x)$ est appelée **restriction** de f au sous-ensemble E' et notée $f_{|E'}$. On dit egalement que f est un **prolongement** de g à E.

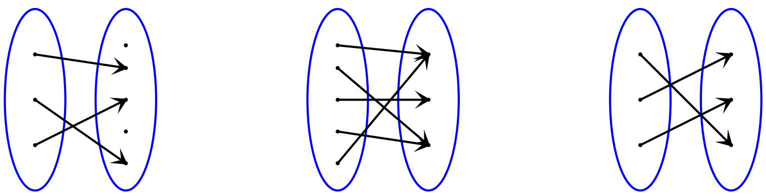
Exemple : La fonction $x \rightarrow x \ln x$, définie sur R_+^*, peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur R_+ en posant $\tilde{f}(0) = 0$. En pratique, on utilise souvent la même notation pour désigner le prolongement que pour la fonction d'origine, même si c'est un abus de notation.

Définition 11. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications, alors la **composée** de g et de f est l'application $g \circ f : E \rightarrow G$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque 8. La composition n'est bien sûr pas commutative ; en général, $f \circ g$ n'est même pas définie quand $g \circ f$ l'est.

Exemple : On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$; alors $g \circ f(x) = |x|$ et $f \circ g(x) = x$ (la première composée étant définie sur $\mathbb{R}$ et la deuxième sur $\mathbb{R}_+$).

Définition 12. Soit $f : E \rightarrow F$ une application, f est dite **injective** si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = y$; f est dite **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$; enfin, f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.



f injective $\qquad$ f surjective $\qquad$ f bijective

Remarque 9. Autrement dit, f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f, surjective si tout élément de F a au moins un antécédent de F, et bijective si tout élément de F a exactement un antécédent par f. On peut aussi définir une application injective de la façon suivante : $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Exemples : L'application $x \mapsto x^2$, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, est surjective (tout réel positif admet une racine carrée) mais pas injective car par exemple 2 et -2 ont la même image par f. L'application racine carrée est pas contre bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.

Proposition 3. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration. Supposons g et f injectives, et soient $x, x' \in E^2$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Par injectivité de g, on a alors nécessairement $f(x) = f(x')$, puis par injectivité de f, $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$. Supposons désormais g et f surjectives et soit $z \in G$. Par surjectivité de g, $\exists y \in F$, $z = g(y)$, puis par surjectivité de f, $\exists x \in E$, $y = f(x)$. Mais alors $z = g \circ f(x)$, donc z a un antécédent par $g \circ f$, ce qui prouve sa surjectivité. $\square$

Remarque 10. La réciproque de ces propriétés est totalement fausse, voir la feuille d'exercices pour quelques exemples.

Proposition 4. Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. L'application g est alors appelée **bijection réciproque** de f (ou réciproque tout court) et notée f^{-1}.

Remarque 11. Cette réciproque, bien que notée f^{-1}, n'a rien à voir avec la fonction inverse de f, que pour cette raison nous noterons toujours $\frac{1}{f}$. Notons au passage que f^{-1} est effectivement bijective, de réciproque f (c'est évident une fois le théorème démontré).

Démonstration. Supposons f bijective et soit $y \in F$. Il existe un unique antécédent x de y par f, on pose $g(y) = x$. On a alors par construction $f \circ g(x) = x$, donc $f \circ g = id_F$. De plus, si $x \in E$, $g(f(x))$ est un antécédent de $f(x)$, mais comme il n'y en qu'un ça ne peut être que x, donc on a aussi $g \circ f = id_E$.
Réciproquement, si $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$, considérons x et x' tels que $f(x) = f(x')$, on a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, donc $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f. Soit maintenant $y \in F$, alors $g(y)$ est un antécédent de y par f puisque $f \circ g(y) = y$, donc f est sujective. L'application f est donc bijective. $\square$

Remarque 12. Vous connaissez déjà quelques exemples classiques de bijections réciproques, notamment ln (bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$) et exp (bijective réciproque de ln de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$). Vous savez également que les représentations graphiques de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. C'est une propriété générale des fonctions réciproques.

Exemple : L'application $f : x \mapsto 3x + 6$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et son application réciproque est l'application $g : x \mapsto \frac{1}{3}x - 2$. En effet, $g \circ f(x) = \frac{1}{3}(3x + 6) - 2 = x$ et $f \circ g(x) = 3\left(\frac{1}{3}x - 2\right) + 6 = x$.

Proposition 5. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est une application bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. f et g étant à la fois injectives et surjectives, $g \circ f$ est à la fois injective et surjective (cf plus haut) donc bijective. De plus, $\forall x \in E$, $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f(x) = f^{-1}((g^{-1} \circ g)(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$ et de même $\forall x \in G$, $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}(x) = x$. $\square$

Définition 13. Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle **image** (directe) de A l'ensemble des images des éléments de A : $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$. Soit maintenant $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par F l'ensemble des antécédents d'élements de B : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Remarque 13. La deuxième notation n'a pas été choisie de façon contradictoire avec la définition d'application réciproque (encore heureux). Si f est bijective, l'image réciproque d'une partie B de F est confondue avec son image directe par f^{-1}.

Exemple : Considérons l'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f([2;5]) = [4;25]$; $f([-1;3]) = [0;9]$; $f^{-1}([4;9]) = [-3;-2] \cup [2;3]$.