NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°6

ECE3 Lycée Carnot

25 mars 2010

1. Compléter le tableau suivant :

	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
$\mathcal{U}(n)$	$\{1;2;\dots;n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(n;p)$	$\{0;1;\dots;n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{H}(N;n;p)$	$\{\max(0;n-Nq);1\dots;\min(n,Np)\}$	$\frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

2. Une société fait appel cinq fois au cours d'un mois à un service de dépannage informatique qui se vante d'être sur place dans l'heure suivant l'appel, mais qui est en réalité en retard une fois sur 10. On note X le nombre de retards observés sur les cinq appels effectués et Y le rang du premier appel auquel on a observé un retard (s'il n'y a jamais eu de retard, on conviendra de poser $Y=0$).

   (a) La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(5;\frac{1}{10}\right)$. On a donc $E(X)=\frac{5}{10}=0.5$ et $V(X)=5\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}=0.45$.

   (b) On a $P(Y=0)=\left(\frac{9}{10}\right)^5$.

   (c) À l'aide d'une application répétée de la formule des probabilités composées, on obtient $P(Y=1)=\frac{1}{10}$; $P(Y=2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{100}$; puis $P(Y=3)=\frac{9^2}{1\ 000}$; $P(Y=4)=\frac{9^3}{10^4}$ et enfin $P(Y=5)=\frac{9^4}{10^5}$.

   (d) Si on sait que le premier retard intervient au troisième appel, on aura $X=2$ si (et seulement si) on a un retard au quatrième appel mais pas au cinquième, ou un retard au cinquième mais pas au quatrième, soit $P_{Y=3}(X=2)=\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{18}{100}=0.18$. Or, on sait que $P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^3=10\times\frac{9^3}{10^5}=\frac{729}{10\ 000}=0.0729$. Les deux évènements ne sont donc pas indépendants.

   (e) On a vu plus haut que la probabilité d'un mois sans retard était de $\left(\frac{9}{10}\right)^5$. Si on répète cette expérience sur 12 mois, la variable Z va suivre une loi binômiale de paramètre $\left(12;\left(\frac{9}{10}\right)^5\right)$.