Interrogation Écrite n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

8 octobre 2009

1. $A \cap B = \{2;4;6;8\}$; $B \cup C = \{2;3;4;5;6;7;8;9;12;15\}$; $C \cap \bar{A} = \{3;9;15\}$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{3;6;9;12\}$.
2. La suite (u_n) est géométrique de raison 2. On a donc $u_4 = 2^4 u_0$, soit $u_0 = \frac{16}{2^4} = 1$, puis $u_n = 2^n$.
3. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, son équation de point fixe est $x = \frac{1}{2}x - 2$, ce qui donne $x = -4$. On pose donc $v_n = x+4$, et on vérifie que cette suite auxiliaire est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1}+4 = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 = \frac{1}{2}(u_n+4) = \frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de permier terme $v_0 = u_0 + 4 = 3$, d'où $v_n = \frac{3}{2^n}$, puis $u_n = v_n - 4 = \frac{3}{2^n} - 4$.
   On en déduit que $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = 3 \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{k=n} 4 = 3\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 4(n+1) = 6\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 4n - 4 = 2 - \frac{3}{2^n} - 4n$.
4. La suite (v_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $6x^2 - 5x + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, elle admet deux racines réelles $r = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}$ et $s = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}$. On en déduit que le terme général de la suite est de la forme $u_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{\beta}{3^n}$. En utilisant les valeurs de v_0 et v_1, on obtient les conditions $\alpha + \beta = 1$ et $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 1$, soit $\alpha = 1 - \beta$ et $\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{6} = 1$, ce qui donne $-\frac{\beta}{6} = \frac{1}{2}$, puis $\beta = -3$, et enfin $\alpha = 4$. Conclusion : $u_n = \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} = \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{3^{n-1}}$.