Devoir Maison n°7 : corrigé

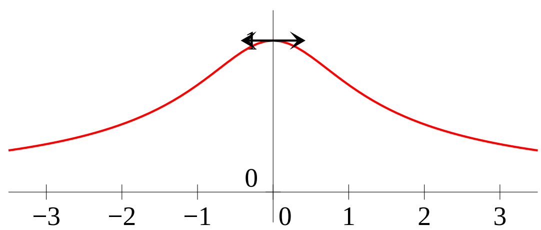
ECE3 Lycée Carnot

16 avril 2010

Sujet d'annales : Ecricome 2004

I. Etude de f.

1. En effet, f est définie sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve sous la racine est toujours supérieur ou égal à 1), et $f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$, donc f est paire.
2. La fonction f est dérivable et même C^∞ sur son ensemble de définition, et comme $f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2} \times (2x) \times (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée est toujours du signe opposé à celui de x, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$, et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Elle a pour maximum $f(0) = 1$.
3. Sans difficulté aucune, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$.
4. Au vu des deux questions précédentes, f est bornée par 0 et 1 sur $[0; +\infty[$. La fonction étant paire, ces bornes sont en fait valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Voici l'allure de la courbe :



6. La fonction f étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, elle y est bijective, et les calculs précédents montrent que l'intervalle image est $J =]0; 1]$.
7. Si $f(x) = y$, alors $\dfrac{1}{y} = \sqrt{1+x^2}$, donc $\dfrac{1}{y^2} = 1 + x^2$, et $x^2 = \dfrac{1}{y^2} - 1$. Comme x doit être positif, on en déduit que $x = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1} = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.
8. La fonction f^{-1} est définie sur $]0; 1]$ par $f^{-1}(y) = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

II. Calcul d'aire

1. En effet, si $x \geqslant 0$, c'est clair. Sinon, on cherche à prouver que $-x < \sqrt{x^2+1}$, ce qui est équivalent puisque les deux membres sont positifs en supposant $x < 0$ à l'inégalité $x^2 < x^2 + 1$, qui est indiscutablement vraie. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction F est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F'(x) = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$. La fonction F est bien une primitive de f.
3. Calculons $F(-x) = \ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$. Or, via multiplication par la quantité conjuguée, $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$; donc $F(-x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -F(x)$, et la fonction F est impaire.
4. Encore un calcul qui ne devrait pas poser de problème : ce qui se trouve dans le ln tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. La fonction F étant impaire, on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.
5. Par définition de l'intégrale, $\mathcal{A}(\lambda) = F(2\lambda) - F(\lambda) = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}) - \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}) = \ln \dfrac{2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}$. Cherchons la limite de ce quotient, qui est égal lorsque $\lambda > 0$ à $\dfrac{2\lambda+\lambda\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda+\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}} = \dfrac{2+\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}}$. Tout ceci converge vers $\dfrac{2+\sqrt{4}}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{4}{2} = 2$, donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \ln 2$.

III. Etude de la suite (u_n).

1. Calculons donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = F(1)-F(0) = \ln(1+\sqrt{1+1}) - \ln(0+\sqrt{0+1}) = \ln(1+\sqrt{2})$. Puis $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1$.
2. On a $u_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$. Essayons donc, comme nous le suggère aimablement l'énoncé, une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ u'(x) = 2x & v(x) = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$, pour obtenir $u_3 = [x^2\sqrt{x^2+1}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.
3. Pout tout $x \in [0;1]$, et pour tout entier n, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}f(x) \leqslant x^n f(x)$, et en intégrant l'inégalité $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.
4. Comme de plus (u_n) est l'intégrale d'une fonction positive, donc positive, la suite est décroissante minorée par 0, et converge donc.
5. Il suffit de rappeler que $0 < f(x) \leqslant 1$, donc $x^n f(x) \leqslant x^n$ sur $[0;1]$, et $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
6. Un petit coup de théorème des gendarmes pour achever l'exercice, la suite (u_n) converge vers 0.