Devoir Maison n°7

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 15 avril 2010

Un sujet d'annales pour réviser toute l'analyse

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. Etude de f.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Déterminer la lmite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.
6. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que $f(x) = y$.
8. Déterminer alors la bijection réciproqie f^{-1}.

II. Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{2\lambda} f(x)\, dx$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+\sqrt{x^2+1}>0$$
En déduire l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.
5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

III. Etude de la suite (u_n).

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.
(On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}=x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :
$$\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$$
en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).