Devoir Maison n°6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

9 mars 2010

Exercice 1

1. (a) D'après l'énoncé, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ puisque le joueur mise sur trois numéros après avoir gagné, et $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$ puisqu'il ne mise que sur deux numéros après avoir perdu. Les évènements A_n et A_{n+1} formant un sysyème complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A}_n) \times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}P(A_n) + \dfrac{1}{6}P(\bar{A}_n)$. Avec les notations de l'énoncé, on peut le traduire par $p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{6}(1-p_n) = \dfrac{1}{12}p_n + \dfrac{1}{6}$.

   (b) La suite est arithmético-géométrique d'équation de point fixe $x = \dfrac{1}{12}x + \dfrac{1}{6}$, donnant $x = \dfrac{2}{11}$. En posant $u_n = p_n - \dfrac{2}{11}$, on constate que $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{12}p_n + \dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{12}p_n - \dfrac{1}{66} = \dfrac{1}{12}\left(p_n - \dfrac{2}{11}\right) = \dfrac{1}{12}u_n$, donc (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$. Comme $p_1 = \dfrac{1}{12}$ (l'énoncé nous précise que le joueur parie sur un seul numéro au premier tirage), on a $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{12} - \dfrac{2}{11} = -\dfrac{13}{132}$, et on en déduit que $p_n = \dfrac{2}{11} - \dfrac{13}{132}\left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1}$. La suite géométrique (u_n) étant de raison comprise entre -1 et 1, elle tend vers 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{2}{11}$.

2. (a) Si on oublie le cas très particulier $n = 1$, B_n est réalisé si le joueur perd la première partie (où il a parié sur un seul numéro), puis toutes celles pour k allant de 2 à $n-1$ (où il parie sur deux numéros à chaque fois) et enfin gagne la dernière (où il a également parié sur deux numéros). La formule des probabilités composées nous donne $P(B_n) = \dfrac{11}{12} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{72}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}$.

   (b) Si $k = 1$, le joueur doit gagner la première partie (une chance sur 12), puis perdre la deuxième (où il parie sue trois numéros), ainsi que toutes les autres (où il parie à chaque fois sur deux numéros), donc $P(B_1) = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{9}{12} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2} = \dfrac{1}{16} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}$. Enfin si $2 \leqslant k \leqslant n-1$, le joueur perd la première partie (un numéro), puis toutes les parties de la deuxième jusqu'à la $k-1$ (deux numéros tentés à chaque fois), gagne la partie k (deux numéros tentés), perd la partie $k+1$ (trois numéros tentés) puis toutes les autres (deux numéros tentés à chaque fois) qui sont au nombre de $n-(k+1)$, ce qui donne $P(B_k) = \dfrac{11}{12} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-2} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{9}{12} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-k-1} = \dfrac{11}{96} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$

   (c) On a simplement $q_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(B_k) = P(B_1) + P(B_n) + (n-2)P(B_k)$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{55}{432}+\frac{5}{96}+(n-2)\times\frac{11}{96}\right).$$

Exercice 2

1. (a) Calculons la dérivée : $f'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x+n)$. La parenthèse s'annule pour $x = -\dfrac{n}{n+1}$. Si n est impair, $n-1$ est pair et x^{n-1} est positif, sinon, x^{n-1} change de signe pour $x = 0$, ce qui donne les deux tableaux suivants (n impair, puis n pair) :

x	$-\infty$		$-\dfrac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	< 2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\dfrac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	< 2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) On a $\left|-\dfrac{n}{n+1}\right| < 1$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (et en particulier pour $k = n$ et $k = n+1$), $-1 < \left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^k < 1$ et on en déduit que $f\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 1 + 1 = 2$.

   (c) On a $f(1) = 2$. En utilisant les tableaux de variations de la question précédente, on voit que si n est pair, $f(\mathbb{R}^- \subset]-\infty; 2[$, donc 2 ne peut pas avoir d'antécédent négatif. Comme de plus f est strictement croissante donc bijective sur $\mathbb{R}_+$, 2 ne peut avoir qu'(au plus) un antécédent positif, qui se trouve être égal à 1. Par contre, si n est impair, f est bijective sur $\mathbb{R}^+$, mais également sur $\mathbb{R}^+$ et 2 admet un antécédent sur chaque intervalle. Son antécédent positif est toujours égal à 1, et il y a un deuxième antécédent négatif plus petit que $\dfrac{-n}{n+1}$.

2. (a) On calcule $AP = \begin{pmatrix} 1+x & 1+y \\ 1+x & 1+y \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont égales si $1+x = 0$, donc $x = -1$, et $1+y = 2y = 2$, c'est-à-dire $y = 1$. On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Notons a, b, c et d les coefficients inconnus de la matrice Q. On a alors $PQ = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{pmatrix}$. Pour avoir $PQ = I$, il faut donc déjà que $a+c = 1$, $b+d = 0$, soit $d = -b$; $c - a = 0$, soit $c = a = \dfrac{1}{2}$ à cause de la première équation, et enfin $d - b = 1$, donc $d = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$ en utilisant $d = -b$. Finalement, on a nécessairement $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Reste à vérifier qu'alors $QP = I$, ce qui est vrai.

   Par contre, pas de calcul pour la deuxième partie de la question : si $AP = PD$, alors $APQ = PDQ$ (en multipliant à droite par Q), mais $APQ = AI = A$, donc $A = PDQ$. De même, $QAP = QPD = ID = D$.

3. (a) Posons $Y = QXP$. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : Y^n = QX^nP$. C'est vrai pour $n = 1$ par définition de Y, et si on le suppose vrai pour un entier n, alors $Y^{n+1} = YY^n = (QXP)(QX^nP) = QX(PQ)X^nP = QXX^nP = QX^{n+1}P$.

   (b) En effet, si $X^{n+1} + X^n = A$, alors $Q(X^{n+1} + X^n)P = QAP$, c'est-à-dire en développant $Y^{n+1} + Y^n = D$.

   (c) i. Comme $Y^{n+1} + Y^n = D$, on a $YD = DY = Y^{n+2} + Y^{n+1}$.

   ii. Le calcul donne $YD = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix}$ et $DY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut bien avoir $b = c = 0$.

   iii. La matrice Y est donc diagonale. On a donc $Y^{n+1}+Y^n = \begin{pmatrix} a^{n+1} + a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1} + d^n \end{pmatrix}$. Comme $Y^{n+1} + Y^n = D$, on en déduit que $0 = a^{n+1} + a^n = a^n(a+1)$, donc $a = 0$ ou $a = -1$.

   iv. Reste à déterminer d, qui est solution de l'équation $f(x) = 2$ puisque $d^{n+1} + d^n = 2$. En utilisant la première partie de l'exercice, on a donc, si n est pair, une seule solution pour d (qui est $d = 1$) et deux pour Y (selon que a vaut 0 ou -1) ; et si n est impair, deux solutions pour d et deux pour a, soit quatre possibilités pour Y.

   (d) Les solutions de (E_3') sont les quatre matrices $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$; $Y_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Comme $X = PYQ$, on retrouve les solutions de (E_3) en calculant PY_iQ, pour $i = 1; 2; 3; 4$. On trouve $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha}{2} & \frac{\alpha-1}{2} \\ \frac{\alpha-1}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Le polynôme P a pour racine évidente $x = -1$: $P(-1) = -2 + 11 + 26 - 35 = 0$, donc on peut le factoriser par $X+1$. Plus précisément, $P(X) = (X+1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c$. Par identification des coefficients, on obtient $a = 2$; $a+b = 11$; $b+c = -26$ et $c = -35$, donc $a = 2$; $b = 9$ et $c = -35$. On a donc $P(X) = (X + 1)(2X^2 + 9X - 35)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 81 + 280 = 361 = 19^2$, et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-9 - 19}{4} = -7$ et $\dfrac{-9 + 19}{4} = \dfrac{5}{2}$. Conclusion : $P(X) = 2(X + 1)(X + 7)\left(X - \dfrac{5}{2}\right)$.

Le polynôme Q a lui pour racine évidente $x = 2$: $Q(2) = 8 + 24 - 2 - 30 = 0$, donc on peut le factoriser par $X - 2$. Effectuons pour changer une petite division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & + & 6X^2 & - & X & - & 30 & X-2 \\
\cline{9-9}
- & (X^3 & - & 2X^2) & & & & & X^2+8X+15 \\
 & & & 8X^2 & - & X & - & 30 & \\
 & & - & (8X^2 & - & 16X) & & & \\
 & & & & & 15X & - & 30 & \\
 & & & & - & (15X & - & 30) & \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Conclusion : $Q(X) = (X - 2)(X^2 + 8X + 15)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 64 - 60 = 4$, et admet deux racines $x_2 = \dfrac{-8 - 2}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-8 + 2}{2} = -3$. On en déduit que $Q(X) = (X - 2)(X + 5)(X + 3)$.