Devoir Maison n°6

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 9 mars 2010

Exercice 1

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12, et ayant la même probabilité d'être tirés à chaque tirage. À chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12, et il gagne si l'un des numéros sur lesquels il a misé est tiré. Un joueur possédant un crédit illimité effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la n-ème partie, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la n-ème partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la n-ème partie ».
   (a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$. En déduire une relation de récurrence sur la suite p_n.
   (b) Calculer la valeur de p_n en fonction de n et déterminer sa limite.
2. Soit $k \in \{1; \dots; n\}$, on note B_k l'événement « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la k-ème partie ».
   (a) Calculer $P(B_n)$.
   (b) Soit $k \in \{1; \dots; n\}$, calculer $P(B_k)$.
   (c) En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) Étudier, suivant la parité de n, les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{n+1} + x^n$.
   (b) Montrer que dans tous les cas $f\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$.
   (c) Calculer $f(1)$ et en déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation $x^{n+1} + x^n = 2$.
2. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice P de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ telle que $AP = PD$.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice Q telle que $PQ = QP = I$ (et la déterminer), en déduire que $A = PDQ$ et $D = QAP$.

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E_n) : X^{n+1} + X^n = A$$

   (a) On pose $Y = QXP$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y^n = QX^nP$.

   (b) Montrer que la résolution de l'équation (E_n) peut se ramener à la résolution de l'équation $(E'_n) : Y^{n+1} + Y^n = D$.

   (c) Soit Y une solution de (E'_n). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

      i. Montrer que $DY = YD$.

      ii. En déduire que $b = c = 0$.

      iii. Quelle sont les valeurs possibles de a ?

      iv. Discuter suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E'_n).

   (d) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E'_3) à l'aide de α, puis en déduire celles de (E_3) en admettant que $X = PYQ$.

Exercice 3

Factoriser les polynomes $P(x) = 2x^3 + 11x^2 - 26x - 35$ et $Q(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$.