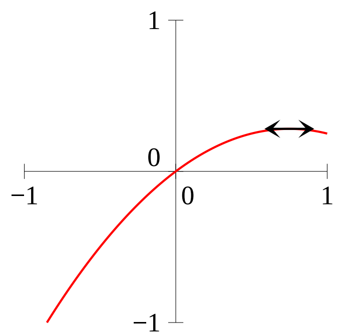
Devoir Maison n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

29 janvier 2010

Exercice 1

1. Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $f(y) = \frac{1}{2}y\left(\frac{3}{2} - y\right) = \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}y^2$. C'est une fonction du second degré, représentée par une parabole, et atteignant son minimum en $y = \frac{3}{4}$, avec $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{32}$. La courbe ressemble à ceci :



2. Le plus simple est de tout développer avant de dériver : $f(x,y) = 2xy - x^2y - xy^2$, donc $\frac{\partial f}{\partial}(x,y) = 2y - 2xy - y^2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - x^2 - 2xy$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y$; $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 - 2x - 2y$; enfin, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x$.
3. Un point critique devra vérifier les deux équations $2y - 2xy - y^2 = 0$ et $2x - x^2 - 2xy = 0$. La première équation se factorise en $y(2 - 2x - y) = 0$. Au vu du domaine de définition de la fonction, la possibilité $y = 0$ est écartée, et on a donc $y = 2 - 2x$. De même, la deuxième équation se simplifie en $x = 2 - 2y$. En substituant, on obtient $x = 2 - 4 + 4x = 4x - 2$, donc $3x = 2$ et $x = \frac{2}{3}$, puis $y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$. Conclusion : le seul point critiqee de la fonction f est $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
4. Calculons donc en partant pour commencer du membre de droite : $\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2\left(y - \frac{8}{3}\right) - y(x + \frac{1}{2}y - 1)^2 = \frac{1}{4}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right)\left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 1 + xy - 2x - y\right)$
$= \frac{1}{4}y^3 - \frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}y - \frac{8}{27} - yx^2 - \frac{1}{4}y^3 - y - xy^2 + 2xy + y^2$
$= -yx^2 - xy^2 + 2xy - \frac{8}{27} = xy(2 - y - x) - \frac{8}{27}$, ce qui prouve l'égalité demandée.

5. En constatant que $f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$, et qu'au vu du calcul précédent, $f(x,y)-\frac{8}{27}\leqslant 0$ sur le domaine de définition de f ($y-\frac{8}{3}$ y est toujours négatif, et y toujours positif, donc on additionne deux nombres négatifs), on peut conclure que le point critique est un maximum pour la fonction f.

Exercice 2

1. Le plus simple est de poser $h(x)=x-\ln x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $1-\frac{1}{x}$. La fonction h est décroissante sur $]0;1]$ et croissante ensuite, elle atteint donc pour minimum $h(1)=1$, ce qui prouve qu'elle est toujours strictement positive. Autrement dit, $\forall x>0$, $x-\ln x>0$ et $\mathcal{D}_f=]0;+\infty[$.
2. On a $f(x)\underset{0}{\sim}\frac{\ln x}{-\ln x}=-1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$, ce qui permet de prolonger f par continuité en posant $f(0)=-1$.
3. Aucun problème sur $]0;+\infty[$, où $f'(x)=\frac{1-\frac{\ln x}{x}-\ln x+\frac{\ln x}{x}}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f'(x)\underset{0}{\sim}\frac{-\ln x}{(-\ln x)^2}=-\frac{1}{\ln x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$. On peut appliquer le théorème de prolongement C^1 et en déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.
4. On a en $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{x}$ qui tend vers 0 par croissance comparée, donc la courbe de f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.
5. La dérivée de f est du signe de $1-\ln x$, et s'annule donc quand $\ln x=1$, c'est-à-dire pour $x=e$. Comme $f(e)=\frac{\ln e}{e-\ln e}=\frac{1}{e-1}$, on obtient le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

6. La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $g'(x)=2x-\ln x-1-\frac{1}{x}$, puis $g''(x)=2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-x+1}{x^2}$. Le numérateur de la dérivée seconde est un trinôme de discriminant $\Delta=1-8=-7$, donc ce trinôme est toujours positif. La fonction g'' étant positive, g est donc convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Puisque g est convexe, g' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, on constate que $g'(1)=2-0-1-1=0$. Il est alors facile de dresser le tableau de variations de g, sachant que $g(1)=1$, et que les limites de g en 0 et en $+\infty$ valent $+\infty$ (calculs faciles) :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

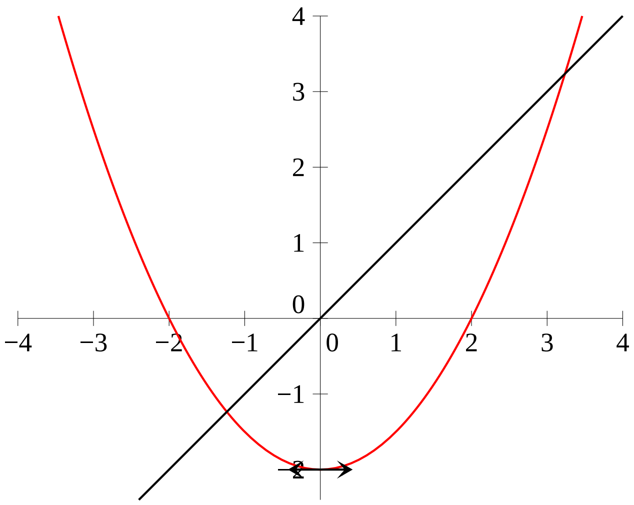
8. En constatant que $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x - \ln x} - \dfrac{x^2 - x\ln x}{x - \ln x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-g(x)}{x - \ln x} = 0$, et que g ne s'annule jamais au vu de son tableau de variations, on conclut aisément que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.

Exercice 3

Posons $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 4)$. La fonction f est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = x$. Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, atteignant un minimum en 0 de valeur $f(0) = -2$. De plus, $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x^2 - 4) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 20$, admettant donc deux solutions $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$, et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$. On remarque par ailleurs que f s'annule pour $x = -2$ et $x = 2$. On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	x_1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	x_2	$\nearrow$	$+\infty$

Ou mieux, faire le dessin suivant :



La séparation des cas à étudier pour la convergence de la suite récurrente n'est pas très simple à faire, car on a malheureusement peu d'intervalles intéressants. Notamment, l'intervalle $[x_1; x_2]$ n'est pas stable, puisque la fonction f y atteint des valeurs plus petites que x_1, en particulier son minimum -2. Il existe tout de même un intervalle stable intéressant au vu des remarques effectuées plus haut : $[-2; 0]$. Examinons en détail tous les cas possibles pour u_0 :

- si $u_0 = x_1$ ou $u_0 = x_2$, la suite est constante (et converge donc vers x_1 ou x_2).
- si $u_0 > x_2$, tous les termes de la suite seront plus grands que x_2 (l'intervalle $[x_2; +\infty[$ est stable), et la suite sera croissante puisque $f(x) > x$ sur cet intervalle. Comme elle ne peut converger vers x_1 ou x_2 sous ces hypothèses, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- passons tout de suite au cas où $x_1 < u_0 < 0$, les autres cas se ramenant tous ou presque à celui-ci ou au précédent. En remarquant que $f(]-2; x_1[) =]x_1; 0[$ et $f(]x_1; 0[) =]-2; x_1[$, on prouve par récurrence que tous les termes d'indice pair de la suite appartiennent à l'intervalle

$]x_1;0[$, et tous les termes d'indice impair à $]-2;x_1[$. Un petit dessin en forme d'escargot permet de se convaincre que les termes pairs se rapprochent de 0 et les termes impairs de -2, mais c'est loin d'être facile à prouver ! En fait, le plus simple est encore de prouver que (u_{2n}) (suite constituée des termes pairs) est croissante et (u_{2n+1}) (suite constituée des termes impairs) est décroissante. Par convergence monotone, les deux suites convergent alors, et ne peuvent converger que vers un réel vérifiant $f(f(x)) = x$ (pour les mêmes raisons qui font que la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction définissant la récurrence). Reste tout à prouver la monotonie de ces deux suites. Faisons-le par exemple pour les termes pairs. On veut en fait prouver que, si $u_{2n} \in]x_1;0[$ $u_{2n+2} > u_{2n}$. Or, $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = \frac{1}{2}u_{2n+1}^2 - 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{2n}^2 - 2\right)^2 - 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}u_{2n}^4 - 2u_{2n}^2 + 4\right) - 2 = \frac{1}{8}u_{2n}^4 - u_{2n}^2$. Si on veut comparer cette valeur à u_{2n}, le mieux est de calculer la différence $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{8}u_{2n}^4 - u_{2n}^2 - u_{2n}$. Posons donc $P(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - x$, ce polynome s'annule pour $x = 0$, mais aussi pour $x = x_1$, $x = x_2$ et $x = -2$ (en effet, ces quatre valeurs sont celles des réels vérifiant $f(f(x)) = x$. On en déduit que $P(x) = \frac{1}{8}x(x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5})(x + 2)$. Conclusion, via un petit tableau de signe, on trouve que $u_{2n+2} - u_{2n}$ est positif sur $]1 - \sqrt{5};0[$ (et accessoirement sur $[1 + \sqrt{5};+\infty[$ et sur $]-\infty;-2]$), ce qui nous permet de prouver la croissance de (u_{2n}). Elle converge donc, et ce ne peut être que vers 0. De même, (u_{2n+1}) est décroissante et converge vers -2. La suite (u_n) est donc bien sûr divergente.

- si $-2 < u_0 < x_1$, le même phénomène se produit, si ce n'est que ce sont cette fois-ci les termes pairs qui se rapprochent de -2 et les impairs de 0.
- si $0 < u_0 < 2$, on aura $-2 < u_1 < 0$, et on peut alors appliquer l'étude précédente. Il y a simplement un cas très particulier qui peut se produire : si $u_0 = -x_1 = \sqrt{5} - 1$, alors $u_1 = x_1$, et la suite est stationnaire (tous les termes sauf u_0 sont égaux à x_1). Sinon, les termes pairs et impairs de la suite convergeront vers 0 et -2.
- les valeurs initiales $u_0 = -2$, $u_0 = 0$ et $u_0 = 2$ donnent des suites très particulières puisqu'elles vont être périodiques, prenant alternativement les valeurs 0 et -2 (à partir de u_1 dans le cas où $u_0 = 2$).
- si $2 < u_0 < x_2$, une petite récurrence permet de prouver que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[-2;x_2[$ (qui est un intervalle stable par f). On peut même dire que la suite va finir par prendre des valeurs dans l'intervalle $[-2;2]$. En effet, si ce n'était pas le cas (un petit raisonnement par l'absurde), la suite prendrait toutes ses valeurs dans $]2;x_2[$, et serait alors décroissante (puisque $f(x) < x$ sur cet intervalle). Comme elle est par ailleurs minorée, elle devrait converger, ce qui ne serait pas possible puisqu'il n'y a pas l'ombre d'un point fixe de f dans cet intervalle (on ne peut pas converger vers x_2 en décroissant si on part d'un u_0 strictement inférieur à x_2). Conclusion : quitte à attendre assez longtemps, on finira par trouver un terme de la suite dans $[-2;2]$, et on pourra appliquer l'étude du troisième cas pour en déduire la convergence des termes pairs et impairs vers 0 et -2. Du moins dans presque tous les cas... On aura en effet quelque chose de très différent si notre premier terme appartenant à $[-2;2]$ est égal à $-x_1$ (ou x_1 mais dans ce cas ce ne sera pas le premier à être dans $[-2;2]$), puisque la suite sera alors stationnaire ! Cela se produit par exemple si $f(u_0) = \sqrt{-1}$, soit $u_0^2 - 4 = 2(\sqrt{5} - 1)$, donc $u_0 = \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)}$. La valeur que nous venons de calculer a elle-même un antécédent dans l'intervalle $[0;x_2[$ qui donnera une suite stationnaire et ainsi de suite. Il existe en fait une infinité de valeurs de u_0 dans cet intervalle pour lesquelles la suite converge vers x_1 en stationnant, et on ne peut pas les calculer simplement. D'autres valeurs un peu particulières sont celles pour lesquelles le premier terme appartenant à $[-2;2]$ est égal à 2 (ou à 0 ou à -2 mais dans ce cas ce ne sera pas le premier à être dans $[-2;2]$), car la suite devient alors périodique ! Malheureusement il y a à nouveau un paquet de valeurs de u_0 pour lesquelles cela se produit (une infinité...) et elles ne sont pas plus évidentes à déterminer. En

fait, constatons qu'on aura $u_1 = 2$ si $\frac{1}{2}(u_0^2 - 4) = 2$, donc $u_0^2 = 8$, soit $u_0 = \sqrt{8}$ (et aussi $u_0 = -\sqrt{8}$, mais ça n'appartient pas à l'intervalle que nous étudions ici). Ensuite, on peut chercher les valeurs de u_0 pour lesquelles $u_2 = 2$, c'est-à-dire $u_1 = \sqrt{8}$, donc on cherche les antécédents de $\sqrt{8}$ par f, puis on peut chercher les antécédents de cette nouvelle valeur par f etc. On construit ainsi une suite de valeurs pour lesquelles la suite finira par être périodique.

- enfin, si $u_0 < -2$, la fonction f étant paire, u_1 (et tous les termes suivants) prend la même valeur que si on partait d'un $u_0 > 2$ qui est l'opposé de notre valeur initiale. On peut donc appliquer les études précédentes. Si $u_0 < -x_2$, la suite diverge vers $+\infty$. Si $u_0 = -x_2$ la suite est stationnaire égale à x_2 à partir de u_1. Si $-x_2 < u_0 < -2$, les termes pairs et impairs se rapprocheront de 0 et -2, sauf pour une petite infinité de valeurs qui sont les opposés de celles que nous n'avons pas pu déterminer ci-dessus, qui donneront une suite stationnaire en x_1, ou périodique.