Devoir Maison n°5

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 29 janvier 2010

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0;1[\times]0;1[$ par $f(x,y) = xy(2-x-y)$.

1. Tracer la représentation graphique de l'application partielle obtenue en fixant $x = \frac{1}{2}$.
2. Calculer les dérivées partielles (d'ordre 1 et d'ordre 2) de la fonction f.
3. Montrer que f admet un unique point critique sur son domaine de définition.
4. Montrer que $f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2\left(y - \frac{8}{3}\right) - y(x + \frac{1}{2}y - 1)^2$.
5. En déduire la nature du point critique.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x}$.

1. Montrer que $\forall x > 0$, $\ln x < x$, et en déduire le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On désignera désormais par f la fonction prolongée.
3. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(x)$ (on soignera bien la justification de la dérivabilité en 0).
4. Déterminer la branche infinie de f en $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variations de f et tracer une allure de sa courbe représentative.
6. On pose désormais $g : x \mapsto x^2 - x\ln x - \ln x$. Étudier la convexité de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Étudier les variations de la fonction g.
8. En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution.

Exercice 3

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4)$. Déterminer la nature de la suite (u_n) en distinguant plusieurs cas selon la valeur de u_0 (plus vous arrivez à dire de choses, mieux c'est...).