Devoir Maison n°4 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

31 décembre 2009

Exercice 1

1. Un bug d'impression que je n'arrive toujours pas à m'expliquer a apparemment fait disparaitre un carré du numérateur de la version f dans la version du DM que je vous ai distribuée (carré qui est bel et bien présent sur le fichier d'origine et sur la version visible sur ma page web, c'est vraiment très très bizarre), ce qui rend la fonction un peu plus pénible à étudier : la fonction f est continue sur son domaine de définition comme somme, produit et composée de fonctions usuelles. De plus, $f'(t) = \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = \dfrac{(t^2+1)^2 - t^2(1+t)}{(1+t)(t^2+1)^2} = \dfrac{t^4+2t^2+1-t^2-t^3}{(1+t)(t^2+1)^2)}$. Le numérateur de cette dérivée vaut $t^4 - t^3 + t^2 + 1$, expression qui est strictement positive quand $t \in [0;1[$ car on a alors $t^2 > t^3$, mais aussi quand $t > 1$ car on a alors $t^4 \geqslant t^3$. La dérivée de f est donc toujours strictement positive, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Il suffit de calculer les limites de f en 0 et $+\infty$ pour déterminer l'image de $\mathbb{R}_+^*$ par f. La limite en 0 vaut 0 sans difficulté. Quand à la limite en $+\infty$, elle vaut $+\infty$ puisque $f(t) \geqslant \ln(t+1)$ et $\ln(t+1)$ tend déjà vers $+\infty$ en $+\infty$. La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.
3. Une simple application du théorème de la bijection permet d'affirmer que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, est strictement croissante comme f, et admet les mêmes limites que f en 0 et en $+\infty$.
4. Il n'y a qu'une branche infinie à déterminer, c'est en $+\infty$. On a vu que f y avait pour limite $+\infty$, et $\dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{1}{t^2+1}$. La deuxième fraction a pour limite 0, quant à la première elle est équivalente à $\dfrac{\ln t}{t}$ et tend donc également vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée. Conclusion, f admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.
5. Il suffit de constater que $\dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}_+^*$ et d'utiliser le fait que f est bijective à valeurs dans cet ensemble.
6. Puisque $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$, on a donc $f(u_n) > f(u_{n+1})$. En appliquant à cette inégalité la croissance stricte de la fonction g, on obtient $g(f(u_n)) > g(f(u_{n+1}))$, soit $u_n > u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante.
7. La suite étant décroissante minorée par 0 (puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, elle converge. Notons l sa limite. Comme $u_n = g\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on doit avoir par continuité de la fonction g, $l = \lim\limits_{t\to 0} g(t)$, soit $l = 0$. La suite converge donc vers 0.
8. En reprenant l'expression de $\dfrac{f(t)}{t}$ donnée plus haut, et en utilisant le fait que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ (limite classique), on obtient $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 2$. Comme (u_n) a pour limite 0, on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(u_n)}{u_n} = 2$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nu_n} = 2$. Cela revient à dire que $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2

1. Pour montrer l'inégalité de gauche, étudions la fonction $h : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - x(x+1) + x + 1}{x^2(x+1)} = \dfrac{1}{x^2(x+1)} > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur son domaine de définition, et comme $h(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$, on constate qu'elle a pour limite 0 en $+\infty$. La fonction h est donc toujours négative sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui prouve en particulier que $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
De même, posons $z(x) = \ln(x) - \ln(x-1) - \dfrac{1}{x}$: z est définie sur $]1; +\infty[$ de dérivée $z'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x(x-1) - x^2 + x - 1}{x^2(x-1)} = -\dfrac{1}{x^2(x-1)} < 0$. Cette deuxième fonction a pour limite 0 en $+\infty$ (calcul similaire au précédent) et est décroissante, donc elle est toujours positive, ce qui prouve la deuxième inégalité.
Notons que ces deux inégalités sont beaucoup plus faciles à obtenir en utilisant un petit peu d'intégration : si $n \leqslant x \leqslant n+1$, on a $\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n}dx \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx$, ce qui donne $\dfrac{1}{n} \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$, d'où les inégalités demandées.
2. Si on additionne les encadrements de la question précédente pour des entiers k compris entre 2 et n, on obtient que $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \ln(k+1) - \ln k \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \ln k - \ln(k-1)$. Les deux sommes extrêmes sont télescopiques et donnent $\displaystyle\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n - \ln 1$. Il manque le terme correspondant à $k = 1$ dans la somme du milieu pour qu'elle soit égale à H_n. Ajoutons-le donc : $1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$. Comme $1 > \ln 2$, on a a fortiori $H_n \geqslant \ln(n+1)$. Par application du théorème des gendarmes, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. En divisant notre encadrement par $\ln n$, on obtient par ailleurs, en utilisant que $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, l'encadrement $1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \leqslant \dfrac{H_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln n}$. Les deux extrêmes tendant chacun vers 1, une nouvelle application du théorème des gendarmes donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$, soit $H_n \sim \ln n$.
3. Commençons par le plus simple en constantant que $a_n - b_n = H_n - \ln n - H_n + \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ a bien pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.
Intéressons nous maintenant à la monotonie de (a_n) : $a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n = \dfrac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$. Cela semble bien avoir un lien avec la fonction f. En fait, les plus observateurs d'entre vous auront remarqué que les fonctions f et g ressemblent étrangement à celles étudiées dans la question 1. En effet, en appliquand l'inégalité de droie de la question 1 à $n+1$ au lieu de n, on obtient immédiatement que $\ln(n+1) - \ln n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$, ce qui prouve que la suite (a_n) est décroissante.
De même, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$, expression positive en reprenant l'inégalité de gauche de la quetsion 1 avec $n+1$ au lieu de n. Les deux suites (a_n) vérifiant les trois condition requises, elles sont donc adjacentes.

4. Une conséquence du résultat démontré à la question précédente est l'existence d'une limite finie pour la suite (a_n), qu'on peut noter γ. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n - \ln n = \gamma$, ou encore $H_n - \ln n = \gamma + o(1)$, soit $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

5. Pour mieux visualiser les choses, constatons que $S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} = H_{2n} - H_n$. De la même façon, on obtient $S_{2n-1} = S_{2n} - \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n - \frac{1}{2n}$. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient alors $S_{2n} = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma - o(1) = \ln(2n) - \ln n + o(1) = \ln 2 + o(1)$. Cette expression est également valable pour S_{2n-1} puisque $\frac{1}{2n}$ est négligeable devant 1. Les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n-1}) convergent donc vers $\ln 2$. Cela suffit à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$.

6. (a) On sait depuis un petit moment maintenant que $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc $u_n = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

   (b) Procédons par identification : $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a(2n^2+3n+1) + b(2n^2+n) + c(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n^2(2a+2b+c) + n(3a+b+c) + a}{n(n+1)(n+2)}$. Si on veut que ce numérateur soit égal à 6, on doit donc avoir $a = 6$; $2a + 2b + c = 0$ et $3a + b + c = 0$, soit $2b + c = -12$ et $b + c = -18$, donc en soustrayant les deux équations $b = 6$, puis $c = -24$. On a donc finalement $\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$

   (c) En séparant les termes pairs et impairs, on a $H_{2n+1} = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k} + \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k+1} + 1$ (si on ne rajoute pas 1 à la fin, il manque le terme correspondant à $k = 1$ dans la somme de gauche). Or, $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \frac{H_n}{2}$, d'où l'égalité demandée.

   (d) Un très beau calcul pour terminer : $\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{6}{k} + \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{6}{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{24}{2k+1} = 6H_n + 6(H_{n+1} - 1) - 24\left(H_{2n+1} - \frac{H_n}{2} - 1\right) = 6(\ln n + \gamma + o(1)) + 6(\ln(n+1) + \gamma + o(1)) - 6 - 24(\ln(2n) + \gamma + o(1)) + 12(\ln n + \gamma + o(1)) + 24 = 18\ln n + 6\ln(n+1) - 24\ln(2n) + 18 + o(1)$ (les γ ont le bon gout de s'en aller). Or, $18\ln n + 6\ln(n+1) - 24\ln(2n) = 18\ln n + 6\ln(n+1) - 24\ln 2 - 24\ln n = \ln\left(\frac{n^{18}(n+1)^6}{n^{24}}\right) - 24\ln 2$. L'affreux ln de gauche peut être tranquillement oublié puisqu'il tend vers 0 (le numérateur est équivalent à n^{24}, donc le quotient tend vers 1), et il ne reste plus qu'à conclure que la série (T_n) converge, et a pour somme $18 - 24\ln 2$ (on se couchera un peu moins bêtes ce soir).