Devoir Maison n°4

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 17 décembre 2009

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \ln(1+t) + \dfrac{t^2}{t^2+1}$.

1. Montrer que la fonction f est continue et strictement croissante.
2. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers un intervalle à préciser.
3. On note g la réciproque de f. Dresser le tableau de variations de g.
4. Déterminer les éventuelles branches infinies de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution, qu'on notera désormais u_n.
6. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
7. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.
8. Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t}$, et en déduire un équivalent simple de u_n.

Exercice 2

On note dans tout cet exercice $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln n$ et $b_n = H_n - \ln(n+1)$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \ln n - \ln(n-1)$.
2. En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln n + 1$, puis déterminer la limite et un équivalent de la suite (H_n).
3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes (on aura besoin d'étudier les fonctions $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \ln(x+2) - \ln(x+2) - \dfrac{1}{x+1}$).
4. En déduire l'existence d'une réel qu'on notera γ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
5. On note désormais S_n la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de H_n et de H_{2n}et, à l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la convergence et la somme de S_n.
6. On s'intéresse dans cette question à la série T_n de terme général $\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2}$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{H_n}{2} - 1$.
   (d) À l'aide de ce calcul et des résultats des questions précédentes, calculer la somme de la série T_n.