Devoir Maison n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

26 novembre 2009

Exercice 1

Commençons par constater que le nombre total de tirages est de $6^4 = 1\ 296$.

1. Il ne reste plus que trois possibilités pour chaque dé, soit $3^4 = 81$ possibilités (ça n'arrivera pas souvent).
2. Il est plus simple de compter le nombre de tirages pour lesquels on n'obtient pas de 6 : il y en a $5^4 = 625$. Le nombre de tirages où il y a au moins un 6 est donc de $1\ 296 - 625 = 671$ (un peu plus de la moitié tout de même).
3. Il y a trois résultats possibles pour chaque dé (que ce soit un chuffre pair ou impair ne change rien), mais il faut également choisir lequel des quatre dés donnera le chiffre impair, ce qpour quoi on a quatre choix. Cela donne donc $3^4 \times 4 = 324$ tirages satisfaisant la condition stipulée.
4. Ca c'est simple : 6 choix pour le premier dé, 5 pour le deuxième, 4 pour le troisième et 3 pour le dernier, soit $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ tirages (à peine plus d'un quart du total des tirages).
5. Difficile de faire mieux que de compter « à la main ». Pour obtenir quatre chiffres consécutifs, on a trois possibilités : $(1, 2, 3, 4)$; $(2, 3, 4, 5)$ et $(3, 4, 5, 6)$. Les dés étant tirés simultanément, l'ordre n'a pas d'importance, donc chacune de ces trois possibilités peut être réalisée de $4! = 24$ façons différentes (le nombre de permutations des quatre chiffres sur les quatre dés lancés). Soit $24 \times 3 = 72$ tirages possibles (à peine plus d'une fois sur 20).

Exercice 2 (EDHEC 97)

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition, et $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$. Cette dérivée est du signe de $x - n$ et s'annule donc pour $x = n$. La fonction f admet un minimum global en n, de valeur $f_n(n) = n - n\ln n = n(1 - \ln n)$. De plus, on a $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. D'où le tableau de variations suivant :

x	0	n	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$n(1-\ln n)$	$+\infty$

   (b) Si $n \geqslant 3$, $1 - \ln n < 0$, donc la fonction f_n s'annule une fois sur $]0; n[$, et une autre fois sur $]n; +\infty[$, d'où le résultat demandé.

2. (a) Calculons donc $f_n(1) = 1 - n\ln 1 = 1 > 0$, et $f_n(e) = e - n\ln e = e - n$. Si $n \geqslant 3$, $e - n < 0$, donc (en utilisant les théorème des valeurs intermédiaires par exemple, ou plus simplement en observant le tableau de variations de f_n), f_n s'annule entre 1 et e, d'où $1 < u_n < e$.

(b) Calculons à nouveau : $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1)\ln u_{n+1} = 0$, ou encore $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$. On en déduit que $f_n(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de le voir, $u_{n+1} > 1$, donc $\ln(u_{n+1}) > 0$. Toujours en utilisant la décroissance de f_n sur $]0;n]$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est decroissante.

(c) La suite est décroissante et minorée par 1, donc converge. On a vu plus haut que $u_n = n\ln(u_n)$, ce qu'on peut aussi écrire $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$, donc $\frac{1}{n} \leqslant \ln u_n \leqslant \frac{e}{n}$. D'après le théorème des gendarmes, $(\ln(u_n))$ converge donc vers 0, ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(d) Maintenant qu'on sait que u_n converge vers 1, on peut aussi dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, ce dont on peut déduire (résultats classique de cours) que $\ln(1+u_n-1) \sim u_n - 1$, c'est-à-dire que $\ln u_n \sim u_n - 1$.Cela revient bien à $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n - 1} = 1$. Or, on sait que $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$ puisque $u_n \sim 1$. On a donc $u_n - 1 \sim \ln u_n \sim \frac{1}{n}$. Une autre façon d'écrire les choses est de dire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. (a) Puisque $v_n > n$, une simple application du théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(b) Calculons donc : $f_n(n\ln n) = n\ln n - n\ln(n\ln n) = n\ln n - n\ln n - n\ln(\ln n) = -n\ln(\ln n)$. Si $n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant \ln 3 > 1$, donc $\ln(\ln n) > 0$, et $f_n(n\ln n) < 0$. En utilisant la croissance de f sur $[n;+\infty[$, on en déduit que $v_n < n\ln n$.

(c) L'étude a déjà été faite puisque g n'est autre que f_2. La fonction g est donc décroissante sur $]0;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$, atteignant un minimum qui vaut $g(2) = 2(1-\ln 2) > 0$. La fonction est donc toujours strictement positive. On peut en particulier en déduire que $\forall n \geqslant 1$, $g(n) > 0$, donc $n > 2\ln n$.

(d) Encore un petit calcul : $f_n(2n\ln n) = 2n\ln n - n\ln(2n\ln n) = 2n\ln n - n\ln n - n\ln(2\ln n) = n\ln n - n\ln(2\ln n) = n(\ln n - \ln(2\ln n))$. Or, d'après la question précédente, $n > 2\ln n$, donc $\ln n > \ln(2\ln n)$, et $f_n(2n\ln n) > 0$. En utilisant une dernière fois la croissance de f_n, on en déduit que $v_n < 2n\ln n$, d'où l'encadrement.

(e) Passons donc à la moulinette logarithmique l'encadrement précédent : $\ln(n\ln n) < \ln(v_n) \leqslant \ln(2n\ln n)$, soit $\ln n + \ln(\ln n) \leqslant \ln v_n \leqslant \ln 2 + \ln n + \ln\ln n$. Le mieux pour obtenir l'équivalent est de tout diviser par $\ln n$: $1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln v_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln 2}{\ln n} + 1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n}$. Il ne reste plus qu'à constater que des deux côtés de l'encadrement on a des termes qui convergent vers 1, donc $\frac{\ln v_n}{\ln n}$ tend aussi vers 1, ce qui signifie bien que $v_n \sim \ln n$.

Exercice 3

Les couples et les restaurants étant distingables, on a 4 choix pour chaque couple, soit $4^6 = 4\ 096$ répartitions possibles.

1. Dans ce cas, il y a simplement 4 possibilités (une pour chaque restaurant).
2. Il faut choisir les trois couples qui vont au chinois, ce qui fait $\binom{6}{3}$ possibilités, et c'est tout puisqu'ensuite les trois couples qui restent vont nécessairement au japonais. Cela fait 20 possibilités.
3. Il faut choisir quels sont les deux restaurants vides (ou les deux pleins), puis choisir quels sont les trois couples qui vont dans le premier restaurant plein, soit $\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120$.

4. En fait, ce n'est pas totalement évident sans formule sur le nombre de sujections (que vous ne connaissez pas). Il y a deux types de possibilité : un restaurant accueille trois couples, et les trois autres un couple, ou bien deux restaurants accueillent deux couples chacun et les deux autres un seul. Dans le premier cas, 4 choix pour le restaurant accueillant trois couples, $\binom{6}{3}$ choix pour les trois couples, et 3! permutations possibles pour les trois couples restants, soit $4 \times 20 \times 6 = 480$ possibilités. Dans le deuxième cas, $\binom{4}{2}$ choix pour les deux restaurants, $\binom{6}{2}$ choix de couple pour le premier restaurant, $\binom{4}{2}$ choix de couples pour le deuxième, et encore 2! possibilités de répartir les deux derniers couples dans les deux derniers restaurants, soit au total $6 \times 15 \times 6 \times 2 = 1\ 080$ possibilités. En additionnant les deux, il y a donc 1 560 cas où aucun restaurant n'est vide. On peut aussi s'en sortir avec la formule de Poincaré en regardant le complémentaire.
5. On a calcule le nombre de cas où il n'y a pas de restaurant vide (question 3), et celui où 3 restaurants sont vides (question 1). On ne peut pas avoir quatre restaurants vides. Calculons les possibilités pour que 2 restaurants exactement soient vides. Il faut choisir les deux restaurants pleins, $\binom{4}{2}$ possibilités, ensuite on répartit les six couples dans les deux derniers, 2^6 possibilités auxquelles on enlève les deux cas où ils vont tous dans le même restaurant (on ne veut pas de troisième restaurant vide). Cela fait donc $\binom{4}{2}(2^6-2) = 372$ cas où deux restaurants exactement sont vides. Le nombre de cas où un restaurant est vide est donc $4\ 096 - 1\ 560 - 372 - 4 = 2\ 160$ (c'est le cas le plus fréquent).
6. On a le choix du restaurant dans lequel les deux couples en question se retrouvent (4 possibilités), puis 3 choix de restaurant pour chacun des 4 autres couples, soit $4 \times 3^4 = 324$ possibilités.