Devoir Maison n°3

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 26 novembre 2009

Exercice 1

On lance simultanément 4 dés à six faces équilibrés. Déterminer le nombre de lancers possibles vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. On n'obtient que des chiffres supérieurs ou égaux à 4.
2. On obtient au moins un 6.
3. On obtient 3 chiffres pairs et un chiffre impair.
4. On obtient quatre chiffres différents.
5. On obtient quatre chiffres consécutifs.

Exercice 2 (EDHEC 97)

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f_n(x) = x - n.\ln(x).$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Etude de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) Calculer $f_n(n \times \ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad n.\ln(n) < v_n$.
   (c) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\times \quad , n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n.\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$
   (e) Montrer enfin que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \ln(n)$

Exercice 3

Un soir de semaine, dans un quartier parisien, six couples (distingables) décident d'aller dîner au restaurant. Il y a quatre restaurants dans le quartier et ces derniers n'auront pas d'autres clients que les couples qui viendront chez eux parmi les six (les pauvres ...). Calculer le nombre total de répartitions possibles, puis le nombre de cas où chacun des événements suivants est réalisé :

1. Tous les couples se retrouvent dans le même restaurant.
2. Trois couples se retrouvent au restaurant chinois, les trois autres au japonais (il n'y a qu'un chinois et un japonais parmi les quatre restaurants).
3. Deux des restaurants accueillent chacun trois couples, les deux autres sont vides.
4. Aucun restaurant n'est vide.
5. Exactement un restaurant est vide.
6. Les deux premiers couples, qui ne se supportent pas, se retrouvent seuls dans le même restaurant.