Devoir Maison n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

6 novembre 2009

Exercice 1

1. Essayons donc d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15 = \frac{4}{3}u_n + 4n - 4 - 6n - 6 + 15 = \frac{4}{3}u_n - 2n + 5 = \frac{1}{3}(4u_n - 6n + 15) = \frac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 4u_0 - 0 + 15 = 19$.
2. On a d'après la question précédente $v_n = \frac{19}{3^n}$, donc $u_n = \frac{v_n + 6n - 15}{4} = \frac{19}{4 \times 3^n} + \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$.
3. C'est un calcul un peu brutal, mais qui ne fait intervenir que des sommes classiques : $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{15}{4} = \frac{19}{4} \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + 3n(n+1) - \frac{15}{4}n = \frac{57}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + 3n(n+1) - \frac{15}{4}n$ (on va se dispenser de tenter de simplifier plus).

Exercice 2

1. Un calcul sommaire donne $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.
2. Pour voir si f est injective, supposons donc $\frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{x'^2}{x'^2 - 4}$, ce qui donne $(x^2(x'^2 - 4) = x'^2(x^2 - 4)$ puis $-4x^2 = -4x'^2$. Ceci n'implique pas que $x = x'$ (on peut aussi avoir $x = -x'$), la fonction n'est pas injective. On a par exemple $f(1) = f(-1) = -\frac{1}{3}$. Pour la surjectivité, partons de $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$, ce qui donne $yx^2 - 4y = x^2$, soit $x^2(y - 1) = 4y$, ou encore $x^2 = \frac{4y}{y - 1}$. Cette équation n'a pas de solution lorsque $y = 1$, donc la fonction f n'est pas non plus surjective.
3. Sur l'ensemble en question, f devient injective puisque seul l'antécédent positif de y est valable (et il y en a toujours un positif et un négatif parmi les deux). Reste à déterminer quels sont les valeurs de y pour lesquelles $x^2 = \frac{4y}{y - 1}$ admet une solution, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles $\frac{4y}{y - 1} \geqslant 0$. Un petit tableau de signe permet de déterminer que l'ensemble d'arrivée de f sera $]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$.
4. D'après les calculs précédents, g est définie sur $]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$ par $g(y) = \sqrt{\frac{4y}{y - 1}}$.

Exercice 3

1. C'est un calcul qui fait un peu peur mais qui n'est au fond pas très compliqué :

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}+\frac{d}{k+3}\\
=\ &\frac{a(k+1)(k+2)(k+3)+bk(k+2)(k+3)+ck(k+1)(k+3)+dk(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\\
=\ &\frac{a(k^3+6k^2+11k+6)+b(k^3+5k^2+6k)+c(k^3+4k^2+3k)+d(k^3+3k^2+2k)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\\
=\ &\frac{(a+b+c+d)k^3+(6a+5b+4c+3d)k^2+(11a+6b+3c+2d)k+6a}{k(k+1)(k+2)(k+3)}
\end{aligned}$$

Si on veut que l'égalité de l'énoncé soit vérifie, on doit donc avoir $a=\frac{1}{6}$ (égalité des coefficients constants), puis $b+c+d=-a=-\frac{1}{6}$; $5b+4c+3d=-6a=-1$ et $6b+3c+2d=-11a=-\frac{11}{6}$. La soustraction des deux premières équations donne $4b+3c+2d=-\frac{5}{6}$, ce qu'on peut soustraire à la troisième équation pour avoir $2b=-\frac{11}{6}+\frac{5}{6}=-1$, soit $b=-\frac{1}{2}$. La première équation devient alors $c+d=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, et la deuxième $4c+3d=-1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$. On a donc $d=\frac{1}{3}-c$, d'où $4c+1-3c=\frac{3}{2}$, soit $c=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$. Enfin, $d=\frac{1}{3}-c=-\frac{1}{6}$. Conclusion de ce superbe calcul : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{6k}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{6(k+3)}$.

2. La somme en question est une somme télescopique (mais oui !) : $$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{6k}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2(k+1)}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2(k+2)}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{6(k+3)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{6k}-\sum_{k=2}^{k=n+1}\frac{1}{2k}+\sum_{k=3}^{k=n+2}\frac{1}{2k}-\sum_{k=4}^{k=n+3}\frac{1}{6k}=\sum_{k=4}^{k=n}\frac{1}{6k}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}-\sum_{k=4}^{k=n}\frac{1}{2k}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2(n+1)}+\sum_{k=4}^{k=n}\frac{1}{2k}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}-\sum_{k=4}^{k=n}\frac{1}{6k}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}=\frac{1}{18}+\frac{1}{3(n+2)}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+3)}=\frac{1}{18}+\frac{2(n+1)(n+3)-(n+2)(n+3)-(n+1)(n+2)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}+\frac{2n^2+8n+6-n^2-5n-6-n^2-3n-2}{6(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$ Vous voyez, ce n'est pas si compliqué que ça, finalement...

3. Notons P_n la propriété : $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$. Pour $n=1$, le membre de gauche vaut $\frac{1}{1\times2\times3\times4}=\frac{1}{24}$, et le membre de droite vaut $\frac{1}{18}-\frac{1}{3(2\times3\times4)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{72}=\frac{3}{72}=\frac{1}{24}$. Ouf, ça marche ! Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$ (par hypothèse de récurrence) $\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{18}+\frac{-(n+4)+3}{3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{18}+\frac{-(n+1)}{3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$, ce qui est exactement ce que stipule P_{n+2}. La propriété est donc bien prouvée par récurrence.

Problème

Préliminaire

1. L'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$, et l'équation admet donc deux solutions $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$. Le terme général de la suite est donc de la forme $x_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)^n$.
2. Les deux racines x_1 et x_2 étant comprises strictement entre -1 et 1, la suite (x_n) est une somme de deux suites convergeant vers 0, d'où $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Question 1

1.a : Prouvons donc par récurrence double la propriété $P_n : u_n \geqslant 1$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ par hypothèse. Supposons désormais la propriété vérifiée par u_n et u_{n+1}. On a alors $\sqrt{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{u_{n+1}} \geqslant 1$, donc $u_{n+2} \geqslant 1 + 1 = 2$ et a fortiori $u_{n+2} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

1.b : PROGRAM valeurs ;
```
USES wincrt ;
VAR a,b,u,v,w : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez des valeurs supérieures à 1 pour les réels a et b') ;
ReadLn(a,b) ;
WriteLn('Choisissez une valeur supérieure à 2 pour l'entier n') ;
ReadLn(n) ;
u := a ; v := b ;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
w := sqrt(u)+sqrt(v) ;
u := v ;
v := w ;
END ;
WriteLn('La valeur de u',n,' est ',v) ;
END.
```

Question 2

2.a : D'après la définition de v_n, on a $2(v_n + 1) = \sqrt{u_n}$, ou encore $4(v_n + 1)^2 = u_n$, soit $u_n = 4v_n^2 + 8v_n + 4$. Si la suite (v_n) converge vers 0, on en déduit bien, par somme de limites, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

2.b : Calculons donc $\frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1}{2(2 + v_{n+2})} = \frac{u_{n+2} - 4}{4(2 + v_{n+2})} = \frac{4v_{n+2}^2 + 8v_{n+2}}{8 + 4v_{n+2}} = v_{n+2}$ (on a utilisé le calcul de la question précédente). On a donc $|v_{n+2}| = \frac{|v_{n+1} + v_n|}{2|2 + v_{n+2}|}$. Or, on sait que $|v_{n+1} + v_n| \leqslant |v_{n+1}| + |v_n|$ (inégalité triangulaire) et d'autre part que $u_n \geqslant 1$, donc $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \geqslant -\frac{1}{2}$. On peut en déduire que $2 + v_{n+2} \geqslant \frac{3}{2}$, d'où finalement $|v_{n+2}| \leqslant \frac{|v_{n+1}| + |v_n|}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.

2.c : C'est une récurrence double, mais assez simple malgré tout : notons P_n la propriété $|v_n| \leqslant x_n$. Par hypothèse, P_0 et P_1 sont vraies (on a même égalité), et, si on suppose à la fois $|v_n| \leqslant x_n$ et

$|v_{n+1}| \leqslant x_{n+1}$, on a alors, en utilisant le résultat de la question précédente, $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|) \leqslant \dfrac{1}{3}(x_{n+1} + x_n) = x_{n+2}$, donc on a bien $|v_{n+2}| \leqslant x_{n+2}$, ce qui achève la récurrence.

Comme on sait (question préliminaire du problème) que (x_n) converge vers 0, et que par ailleurs $|v_n| \geqslant 0$ (comme toute valeur absolue qui se respecte), on peut conclure du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = 0$. Si la valeur absolue de (v_n) tend vers 0, (v_n) également, et la question 2.a nous permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.