Devoir Maison n°2

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 5 novembre 2009

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 1$. On pose ensuite $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1. Prouver que la suite (v_n) est d'un type bien connu et en déduire la valeur de v_n.
2. Calculer la valeur de u_n.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer si f est injective ou surjective sur $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que f est bijective de $[0; 2[\cup]2; +\infty[$ vers un ensemble à déterminer.
4. On note g la réciproque de f (restreinte à $[0; 2[\cup]2; +\infty[$). Déterminer l'expression de $g(x)$.

Exercice 3

1. Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $\forall k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} + \frac{d}{k+3}$$
.
2. À l'aide de la question précédente, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.
3. Vérifier la formule obtenue à la question précédente à l'aide d'une démonstration par récurrence.

Problème (premier exercice Ecricome 99, à peine modifié)

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. Résoudre l'équation caractéristique de cette suite et, sans chercher à déterminer les coefficients α et β, donner l'allure du terme général de la suite.
2. En déduire la limite de la suite (x_n).

On étudie désormais la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \geqslant 1$; $u_1 = b \geqslant 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

1.a : Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie : $u_n \geqslant 1$.

1.b : Ecrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$

2.a : Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

2.b : Vérifier, pour tout entier n, que $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}(|v_n| + |v_{n+1}|)$.

2.c : On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et pour tout entier naturel n :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).