Devoir Maison n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 septembre 2009

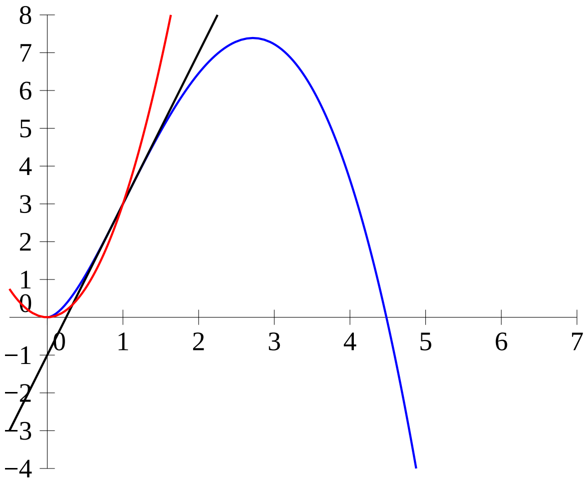
Exercice 1

1. Non, ce n'est pas vrai dans $\mathbb{Z}$, n est toujours strictement supérieur, par exemple, à $n-1$. Par contre, ce serait vrai avec n et p dans $\mathbb{N}$ (il suffit de prendre $n = 0$).
2. Non, c'est complètement faux. Si $x \leqslant 0$, on ne peut pas trouver de $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^y$ (puisque $e^y > 0$), donc encore moins avec $y > 0$. Ce qui est vrai c'est que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y > 0$, $e^x = y$.
3. Oui, ça c'est vrai, cela signifie que la fonction ln peut prendre des valeurs aussi petites que l'on veut, et c'est en effet le cas (à cause de la limite égale à $-\infty$ en 0). Si on veut être plus précis, $\ln(e^a - 1) < \ln(e^a) = a$, donc $x = e^a - 1$ convient.
4. Non, si on n'interdit pas à x et y d'être égaux (et même à y d'être inférieur à x), ça ne peut pas marcher. Un contre-exemple facile : $x = y = 0$.
5. Oui, ça c'est vrai, mais ce n'est pas si facile que ça à justifier. Prenons un entier naturel (non nul) n tel que $\dfrac{1}{n} < a$ (il en existe, par exemple $n = Ent\left(\dfrac{1}{a}\right) + 1$), alors il existe un entier naturel p tel que $\dfrac{p}{n} \in]\sqrt{2}; \sqrt{2} + a[$. En effet, pour p suffisamment grand, $\dfrac{p}{n}$ finit par être plus grand que $\sqrt{2}$. Notons donc p_0 le plus grand entier tel que $\dfrac{p_0}{n} \leqslant \sqrt{2}$. On a donc $\dfrac{p_0 + 1}{n} > \sqrt{2}$, mais aussi $\dfrac{p_0 + 1}{n} < \sqrt{2} + a$, sinon on aurait $\dfrac{p_0 + 1}{n} - \dfrac{p_0}{n} \geqslant \sqrt{2} + a - \sqrt{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n} \geqslant a$, ce qui contredit notre choix pour l'entier n.

Exercice 2

1. Une question très tranquille pour commencer : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.
2. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2\ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. En 0, c'est un tout petit peu plus compliqué, on remarque que $f(x) = 3x^2 - 2x^2 \ln x$, et $\lim\limits_{x \to 0} 3x^2 = 0$, et $\lim\limits_{x \to 0} -2x^2 \ln x = 0$ (par croissance comparée), donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
3. On n'a pas vraiment d'autre choix que de dériver (en général, c'est le cas quand on a un produit). On admet sans sourciller la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ et on constate que $f'(x) = 2x(3 - 2\ln x) - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 6x - 4x \ln x - 2x = 4x(1 - \ln x)$. Comme on est sur $\mathbb{R}_+^*$, seul compte le signe de la parenthèse, et $1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; e]$, et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$. Elle atteint un maximum global en e, de valeur $f(e) = e^2(3 - 2\ln(e)) = e^2 \simeq 7,39$.
4. Pour $a = 1$, on a $f(a) = 1^2(3 - 2\ln 1) = 3$ et $f'(1) = 4(1 - \ln 1) = 4$, donc la tangente a pour équation $y = 4(x - 1) + 3 = 4x - 1$.
5. On a $f(x) = 0$ si $x^2 = 0$ (mais ça n'arrivera pas sur $\mathbb{R}_+^*$) ou si $3 - 2\ln x = 0$, c'est-à-dire si $x = e^{\frac{3}{2}} \simeq 4,48$.

6. Cette équation ne risque pas d'avoir de solution sur $]0; e]$, où la fonction est positive puisque partant de 0 et strictement croissante. Ensuite, la fonction est strictement décroissante, et passe par -1 puisqu'elle a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. Il y a donc bien une unique solution à l'équation $f(x) = -1$ (pour bien justifier les choses, il faut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, que nous reverrons plus tard dans l'année).
7. On a $f(x) - g(x) = 3x^2 - 2x^2 \ln x - 3x^2 = -2x^2 \ln x$, qui est du signe opposé à celui de $\ln x$. La courbe représentative de f est donc au-dessus de la courbe de g sur l'intervalle $]0; 1]$, et en-dessous sur $[1; +\infty[$. les deux courbes se coupent au point de coordonnées $(1; 3)$.
8. Voici le graphique demandé (les deux courbes et la tangente) :



Exercice 3

Commençons par donner le domaine de définition de g, ce qui nécessite de résoudre l'équation $x^2 - 8x + 15 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 64 - 60 = 4$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{8-2}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{8+2}{2} = 5$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{3; 5\}$.

On peut maintenant obtenir facilement le signe du quotient situé à l'intérieur de la valeur absolue :

x		1		3		5	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x^2-8x+15$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{x^2-8x+15}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$

Il suffit maintenant d'étudier les variations du quotient sans valeur absolue pour obtenir facilement celles de g : le signe et le sens de variation vont changer sur les intervalles où le quotient est négatif, et rester identiques sur ceux où il est positif. Notons donc $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-8x+15}$, et dérivons : $h'(x) = \dfrac{x^2-8x+15-(2x-8)(x-1)}{(x^2-8x+15)^2} = \dfrac{-x^2+2x+7}{(x^2-8x+15)^2}$. Seul le signe du numérateur nous intéresse, c'est un trinome de discriminant $\Delta = 4 + 28 = 32$, qui admet deux racines réelles $x_3 = \dfrac{-2-\sqrt{32}}{-2} = 1 + 2\sqrt{2}$, et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{32}}{-2} = 1 - 2\sqrt{2}$. Si on est courageux, on cherche à calculer les images par h de ces deux valeurs : $h\left(1+2\sqrt{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{(1+2\sqrt{2})^2 - 8(1+2\sqrt{2}) + 15} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+4\sqrt{2}+8-8-16\sqrt{2}+15} =$

$\dfrac{2\sqrt{2}}{16-12\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}-6} \simeq -2,91$. De même, on obtient $f(1-2\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}+6} \simeq -0,09$ (on aura du mal à voir cette valeur sur le graphique mais c'est la vie).

Reste à gérer le souci des limites. En fait, encore une fois, il suffit de calculer les limites de h et de changer éventuellement le signe. Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on constate que la limite vaut 0 (je ne détaille pas les calculs, comme on reverra les limites plus tard au cours de l'année, on sera plus à l'aise avec ce genre de calculs à ce moment-là). De même, les limites quand x tend vers 3 ou 5 (que ce soit par valeurs inférieures ou supérieures) sont toujours infinies, donc les limites correspondantes pour g seront toutes égales à $+\infty$. Voici donc le tableau de variations complet de g :

x	$-\infty$	$1-2\sqrt{2}$	1	3	$1+2\sqrt{2}$	5	$+\infty$
$h(x)$	0	$-0,09$	0	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$-2,91$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	0
$g(x)$	0	$0,09$	0	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$2,91$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	0

Et pour conclure, voici la courbe représentative de g (asymptotes en pointillés et extrema soulignés par une double flèche) :