

# Devoir Maison n°1

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 23 septembre 2009

## Exercice 1

Le retour du VRAI/FAUX. Justifier soigneusement chaque réponse (démontrer les résultats vrais, donner des contre-exemples quand c'est faux, éventuellement citer une hypothèse à ajouter pour rendre l'énoncé vrai) :

1.  $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}, n \leq p$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, x = e^y$ .
3.  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \ln x < a$ .
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x < y < z$ .
5.  $\forall a > 0, \exists q \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \leq q \leq \sqrt{2} + a$ .

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2(3 - 2 \ln x)$ .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer les variations de la fonction  $f$ .
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  en son point d'abscisse 1.
5. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
6. Montrer que l'équation  $f(x) = -1$  admet une unique solution.
7. Déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction  $f$  et celle de la fonction  $g : x \mapsto 3x^2$ .
8. Représenter ces deux courbes le plus soigneusement possible dans un même repère.

## Exercice 3

Étudier le plus complètement possible (limites, variations, représentation graphique) la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \left| \frac{x-1}{x^2-8x+15} \right|$ .