Devoir Surveillé n°7 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

5 avril 2010

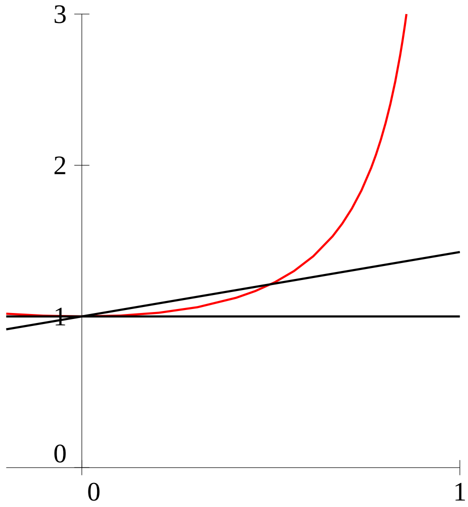
Exercice 1 (Ecricome 2005)

1. Pour I_0, c'est un calcul direct : $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \frac{e^{-2}-1}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}$. Pour I_1, on peut procéder à une intégration par parties en posant $u(x) = 1-x$; $v'(x) = e^{-2x}$, et donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$, ce qui donne $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x} = \left[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{e^{-2x}}{-2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} = \frac{1+e^{-2}}{4}$.
2. Comme $1-x \in [0;1]$ si $x \in [0;1]$, on aura $(1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$ sur l'intervalle d'intégration $[0;1]$, d'où $(1-x)^{n+1}e^{-2x} \leqslant (1-x)^n e^{-2x}$ et on en déduit en intégrant l'inégalité que $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.
3. La fonction intégrée étant positive, $I_n \geqslant 0$.
4. La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge donc.
5. La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier sur $[0;1]$), donc on peut majorer g sur $[0;1]$ par $g(0) = 1$.
6. Par intégration d'inégalités, on déduit du résultat précédent que $I_n \leqslant \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
7. C'est une application évidente du théorème des gendarmes.
8. Posons donc $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-2x}$, ce qui donne $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$, et $v(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$, d'où $I_{n+1} = \left[(1-x)^{n+1}\frac{e^{-2x}}{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n\frac{e^{-2x}}{-2}dx = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$. L'égalité demandée en découle en multipliant tout par 2.

9. On peut réécrire le résultat précédent sous la forme $nIn = 1 - I_n - 2I_{n+1}$. En utilisant la convergence de (I_n) vers 0, le membre de droite de cette égalité tend vers 1, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = 1$.
10. Toujours en reprenant l'égalité de la question 8, on a $nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1}$, donc $n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1}$, et le membre de droite tend vers -3, en utilisant cette fois le résultat de la question 9.
11. Nous avons donc $n(nI_n - 1) = -3 + \varepsilon(n)$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$. Ou encore $nI_n - 1 = -\frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$, puis $nI_n = 1 - \frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$, et enfin $I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}$, dont on déduit que $a = 0$; $b = 1$ et $c = -3$.

Exercice 2 (d'après Ecricome Techno 2009)

1. La fonction f est dérivable sur $[0; 1[$, de dérivée $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$. La fonction f est donc croissante sur $[0; 1[$. De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} e^{-x} = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
2. Au vu du calcul de la question précédente, $f'(0) = 0$, et $f(0) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = 1$.
3. Pour $x = 0$, on obtient $y = 1$, ce qui correspond à la valeur calculée ci-dessus. Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $y = \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 + 1 = \frac{2}{\sqrt{e}}$. Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$. La droite passe donc pas les deux points demandés.
4. Si la fonction est convexe, sa courbe est en-dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes, donc $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de la tangente calculée, et en-dessous de la droite de la question 3 (qui est une corde) sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[$, puis au-dessus de cette même droite sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$. Cela donne l'allure suivante :



5. La fonction étant croissante, on a sur $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ sut $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, soit $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}$. Par intégration de cet encadrement sur un intervalle de largeur $\frac{1}{2}$, on obtient bien $\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$.
6. Petit calcul : $1+x+\frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$. On a donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = (1+x)e^{-x} + x^2\frac{e^{-x}}{1-x} = (1+x)e^{-x} + x^2 f(x)$, et l'égalité demandée est une simple application de la linéarité de l'intégrale.
7. On pose $u(x) = 1+x$ et $v'(x) = e^{-x}$, soit $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$ pour obtenir $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx = [-(1+x)e^{-x}]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}dx = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1 + [-e^{-x}]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} - e^{-\frac{1}{2}} + 1 = 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}$.
8. Réutilisons le fait que $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}$ pour obtenir $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx \leqslant I \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx$. Or, $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$. L'encadrement souhaité en découle, et en reprenant le résultat de la question 6, on a alors $2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{24} \leqslant I \leqslant 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{12\sqrt{e}}$, soit $\frac{49}{24} - \frac{5}{2\sqrt{e}} \leqslant I \leqslant 2 - \frac{29}{12\sqrt{e}}$.
9. La courbe $\mathcal{C}_f$ étant comprise entre la tangente et la droite de la question 4, on a $\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx \leqslant I \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1\ dx$. L'intégrale de gauche vaut

$\frac{1}{2}$, celle de droite vaut $\left[\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-1\right)x^2+x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

Exercice 3 (d'après BL 2008)

1. Dans le cas d'une loi uniforme, on a simplement n probabilités p_i valant $\frac{1}{n}$ chacune, donc $H(X) = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = -n \times \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \ln n$. Comme on sait par ailleurs que $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$, on a $12V(X)+1 = n^2$, donc $\frac{1}{2}\ln(12V(X)+1) = \frac{1}{2}\ln n^2 = \ln n = H(X)$.
2. Dans ce cas, on a deux probabilités valant respectivement p et $1-p$, donc $H(B_p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p)$. De plus, on sait que $V(X) = p(1-p)$. On a donc $H(B_p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p) - p(1-p) = -p\ln p + (p-1)(p+\ln(1-p))$.
3. Calculons donc : $f'(p) = -\ln p - 1 + p + \ln(1-p) + (p-1)\left(1 - \frac{1}{1-p}\right) = \ln(1-p) - \ln p + 2p - 1$, puis $f''(p) = -\frac{1}{1-p} - \frac{1}{p} + 2 = \frac{-p-(1-p)+2p(1-p)}{p(1-p)} = \frac{-1+2p-2p^2}{p(1-p)}$.
4. Le dénominateur est toujours positif, le numérateur a pour discriminant -4, il est toujours négatif, donc la fonction f' est décroissante sur $]0;1[$. De plus, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - 1 = 0$.
5. On déduit de la question précédente que f' est positive sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ puis négative sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$, donc f est croissante puis décroissante, admettant un maximum pour $p = \frac{1}{2}$.
6. Quand $p=0$, $p+\ln(1-p) = 0$, et de plus $\lim_{p\to 0} p\ln p = 0$ (limite classique), donc $\lim_{p\to 0} f(p) = 0$. De même, $\lim_{p\to 1}(p-1)\ln(1-p) = 0$, et tous les autres termes sont nuls pour $p=1$, donc $\lim_{p\to 1} f(p) = 0$. Finalement, la fonction f ne prend que des valeurs positives, d'où $H(B_p) \geqslant V(B_p)$.

Problème (HEC Techno 99)

Première partie : Préliminaires

1. La suite (v_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, dont le discriminant vaut $\frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, et admettant pour racines $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$, et $s = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -1$. On peut donc écrire $v_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, les coefficients α et β vérifiant $\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{6}$ et $\alpha + \frac{1}{4}\beta = \frac{11}{12}$. Il suffit donc de constater que $\frac{8}{9} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{16-1}{18} = \frac{5}{6}$; et $\frac{8}{9} + \frac{1}{4 \times 9} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.
2. Vérifions : $v_{n+2} = w_{n+2} - \frac{2(n+2)}{3} = \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{2}w_n + 1 - \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2} \times \frac{2n}{3} - \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n - \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$. De plus, $v_1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ et $v_2 = \frac{9}{4} - \frac{4}{3} = \frac{11}{12}$. La suite (v_n) est donc bien celle étudiée précédemment, et $w_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n + \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Deuxième partie : Etude de la loi de T_N

1. **Exemples**

   (a) On a $T_1 = 1$ si on tire le 2 au premier tirage, et $T_1 = 2$ sinon (probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque). La variable T_1 suit donc une loi uniforme sur $\{1; 2\}$, d'espérance $E(T_1) = \frac{3}{2}$ et de variance $V(T_1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Pour T_2, on aura nécessairement $T_2 = 2$ si on tire le 2 au premier tirage. Sinon, on aura encore $T_2 = 2$ si on tire le 1 puis le 2, mais $T_2 = 3$ si on commence par tirer deux fois de suite le numéro 1, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{1}{4}$. On a donc $P(T_2 = 2) = \frac{3}{4}$ et $P(T_2 = 3) = \frac{1}{4}$. On calcule $E(T_2) = \frac{6}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, $E(T_2^2) = 4 \times \frac{3}{4} + 9 \times \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$, donc $V(T_2) = E(T_2^2) - (E(T_2))^2 = \frac{21}{4} - \frac{81}{16} = \frac{3}{16}$.

   (b) Pour atteindre un total strictement supérieur à 5, il faut tirer au moins trois numéros (si on tire trois fois le 2, on aura bien $T_5 = 3$), et au pire il faudra attendre le sixième tirage si on ne tire que des 1. Si $X_1 = 2$

est réalisé, on ne peut plus avoir $T_5 = 6$, donc $P_{X_1=2}(T_5 = 6) = 0$. La seule combinaison donnant $T_5 = 3$ est 222, donc $P_{X_1=2}(T_5 = 3) = \frac{1}{4}$. La seule combinaison donnant $T_5 = 5$ sera 2111 (suivi de 1 ou de 2), donc $P_{X_1=2}(T_5 = 5) = \frac{1}{8}$. Enfin, $P_{X_1=2}(T_5 = 4) = \frac{5}{8}$ (soit on débute par 212, soit par 221, soit par 2112).
De même, on a $P_{X_1=1}(T_5 = 3) = 0$ (on ne peut pas dépasser 5 en trois tirages si on commence par un 1) ; $P_{X_1=1}(T_5 = 6) = \frac{1}{16}$ (il faut que les quatre tirages suivants donnent tous des 1) ; $P_{X_1=1}(T_5 = 4) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (il faut avoir soit trois 2, soit un 1 et deux 2, peu importe l'ordre, aux trois tirages suivants) ; et $P_{X_1=1}(T_5 = 5) = \frac{7}{16}$ (il faut avoir soit deux 1 et un 2 lors des trois tirages suivants (peu importe l'ordre) soit trois 1 puis un 2).

(c) Il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $X_1 = 1$ et $X_1 = 2$, pour obtenir $P(T_5 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{8}$; $P(T_5 = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$; $P(T_5 = 5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{9}{32}$; et $P(T_5 = 6) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$.
On calcule ensuite $E(T_5) = 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{9}{16} + 5 \times \frac{9}{32} + 6 \times \frac{1}{32} = \frac{12 + 72 + 45 + 6}{32} = \frac{135}{32}$; $E(T_5^2) = 9 \times \frac{1}{8} + 16 \times \frac{9}{16} + 25 \times \frac{9}{32} + 36 \times \frac{1}{32} = \frac{585}{32}$. Pour les plus courageux, $V(T_5) = \frac{495}{1\ 024}$.

(d) On a $P_{X_1=1}(T_5 = 4) = \frac{1}{2}$ et $P(T_5 = 4) = \frac{9}{16}$, donc les évènements ne sont pas indépendants. Le fait de savoir que $X_1 = 1$ diminue légèrement la probabilité que T_5 soit égal à 4 (savoir que $X_1 = 1$ favorise a priori l'apparition de plus grandes valeurs pour T_5).

2. **Calcul de l'espérance de T_N**

(a) i. La plus grande valeur prise par T_N est $N + 1$ (si on commence par tirer N fois le numéro 1). Le plus petite valeur sera $M + 1$ (si on ne commence avec M fois des deux, suivis d'un 1 ou d'un 2).

ii. La plus grande valeur est toujours $N + 1$ (même raison), et la plus petite vaut $M + 1$ (si on ne tire que des 2 sur les $M + 1$ premiers tirages, on aura un total de $2M + 2$, strictement supérieur à $N = 2M + 1$).

(b) Si le premier tirage a donné 1, on aura $T_{N+2} = k$ si la somme des $k-1$ tirages suivant le premier donne pour la première fois un entier strictement supérieur à $N+1$ (ce qui fera un total strictement supérieur à $N+2$ en ajoutant le 1 initial). Autrement dit, $P_{X_1=1}(T_{N+2} = k) = P(T_{N+1} = k-1)$. De même, si on commence avec un 2, il faudra dépasser N sur les $k-1$ tirages suivants, soit $P_{X_1=2}(T_{N+2} = k) = P(T_n = k-1)$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements constitué de $X_1 = 1$ et $X_1 = 2$ donne alors la formule souhaitée.

(c) On a $E(T_{N+2}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N+2} kP(T_{N+2} = k)$ (pour simplifier, on commence la somme à $k = 1$ même si les premières valeurs sont nulles), donc $E(T_{N+2}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=N+2} kP(T_{N+1} = k-1) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=N+2} kP(T_N = k-1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=N+1} (k+1)P(T_{N+1} = k) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=N+1} (k+1)P(T_N = k) = \dfrac{1}{2}E(T_{N+1}) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=N+2} P(T_{N+1} = k) + \dfrac{1}{2}E(T_N) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=N+2} P(T_N = k) = \dfrac{1}{2}(E(T_{N+1}) + E(T_N)) + 1$.

(d) Au vu des calculs d'espérance de T_1 et T_2 et de la formule de récurrence précédente, $E(T_N) = w_N$, où (w_n) est la suite étudiée dans la partie préliminaire. On a donc $E(T_N) = \dfrac{2}{3}N + \dfrac{8}{9} + \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^N$, ce qui coïncide avec la formule de l'énoncé. La partie géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ a une limite nulle, donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{E(T_N)}{N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{6N+8}{9N} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
Cette limite est assez raisonnable : en moyenne, on obtient à chaque tirage une valeur égale à $\dfrac{3}{2}$. On aura donc un total moyen de $\dfrac{3}{2}k$ après k lancers, et il faudra donc environ $\dfrac{2}{3}N$ lancers pour atteindre un total de N.

3. **La loi de T_N**

(a) L'évènement $T_N > k$ signifie qu'il faut au moins attendre le lancer numéro $k+1$ avant de dépasser la valeur N, ou encore qu'on a une somme de résultats inférieure ou égale à N après le lancer numéro k. Cela coïncide bien avec l'évènement $S_k \leqslant N$. Or, si on note Z_k le nombre de fois où on a obtenu 2 lors des k premiers lancers, le total obtenu vaut $2 \times Z_k + 1 \times (k - Z_k)$ (puisqu'on a otenu $k - Z_k$ fois la valeur 1), soit $Z_k + k$. Dire que $S_k \leqslant N$ revient donc à dire $Z_k + k \leqslant N$, soit $Z_k \leqslant N - k$. Or, Z_k est bien une variable aléatoire suivant une loi binômiale de paramètre $\left(k, \frac{1}{2}\right)$ (nombre de succès après répétition de k épreuves de probabilité de succès $\frac{1}{2}$).

(b) Au vu de la question précédente, $P(T_N > k) = P(Z_k \leqslant N-k)) \sum_{i=0}^{i=N-k} P(Z_k = i) = \sum_{i=0}^{i=N-k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-i} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{i=N-k} \binom{k}{i}$.

(c) Nous aurons besoin pour les calculs du triangle de Pascal, qui ne sera pas reproduit dans le corrigé. On obtient $P(T_{10} > 10) = \frac{1}{2^{10}} \sum_{i=0}^{i=0} \binom{10}{i} = \frac{1}{1\ 024}$; puis $P(T_{10} > 9) = \frac{1}{2^9} \sum_{i=0}^{i=1} \binom{9}{i} = \frac{1+9}{2^9} = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}$; puis $P(T_{10} > 8) = \frac{1}{2^8} \sum_{i=0}^{i=2} \binom{8}{i} = \frac{1+8+28}{256} = \frac{37}{256}$; puis $P(T_{10} > 7) = \frac{1}{2^7} \sum_{i=0}^{i=3} \binom{7}{i} = \frac{1+7+21+35}{128} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$; puis $P(T_{10} > 6) = \frac{1}{2^6} \sum_{i=0}^{i=4} \binom{6}{i} = \frac{1+6+15+20+15}{64} = \frac{57}{64}$; et enfin $P(T_{10} > 5) = 1$ (on somme tous les coefficients de la ligne), ce qui est normal puisque T_{10} prend des valeurs de 6 à 11. Ne reste plus qu'à en déduire les probabilités par soustraction on a par exemple $T_{10} = 7$ si $T_{10} > 6$ est vérifié, mais pas $T_{10} > 7$, d'où $P(T_{10} = 7) = P(T_{10} > 6) - P(T_{10} > 7)$. On obtient finalement le tableau suivant :

k	6	7	8	9	10	11
$P(T_{10} = k)$	$\frac{7}{64}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{91}{256}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{19}{1\ 024}$	$\frac{1}{1\ 024}$