Devoir Surveillé n°7

ECE3 Lycée Carnot

5 avril 2010

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (Ecricome 2005)

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$, ainsi que l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)dx$. On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que $I_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \dfrac{\varepsilon(n)}{n^2}$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0;1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 2 (d'après Ecricome Techno 2009)

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$, et à l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$. On cherche plus précisément à encadrer la valeur de cette intégrale, sans la calculer. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0;1[$, ainsi que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
3. Montrer que la droite d'équation $y = 2\left(\dfrac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1$ passe par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 et $\dfrac{1}{2}$.
4. On admet que f est convexe sur $[0;1[$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et des deux droites introduites aux questions précédentes, et faire une représentation graphique rapide de f sur $[0;1[$ (on donne $\dfrac{2}{\sqrt{e}} \simeq 1.2$).

5. Montrer que $\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$.
6. Montrer que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$. En déduire que $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$.
7. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
8. En reprenant une méthode similaire à celle de la question 5, montrer que $\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx \leqslant \frac{1}{12\sqrt{e}}$. En déduire un deuxième encadrement de I.
9. En utilisant les considérations géométriques de la question 4, montrer que $\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right) x + 1 \; dx$, et en déduire un troisième encadrement de I.

Exercice 3 (d'après BL 2008)

Soit X une variable aléatoire finie prenant ses valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. on note $p_i = P(X = x_i)$ et on appelle entropie de X le réel défini par $H(X) = -\sum_{i=1}^{i=n} p_i \ln(p_i)$.

1. On suppose dans cette question que $X \sim \mathcal{U}_n$. Montrer que $H(X) = \ln n$ puis, après avoir rappelé la valeur de $V(X)$, vérifier que $H(X) = \frac{1}{2}\ln(12V(X)+1)$.
2. On s'intéresse désormais à une variable B_p suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note f la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(p) = H(B_p) - V(B_p)$. Montrer que $f(p) = -p\ln p + (p-1)(p + \ln(1-p))$.
3. Calculer les dérivées première et seconde f' et f'' de f.
4. Étudier les variations de f' et calculer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
5. En déduire les variations de f.
6. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis prouver qu'on a toujours $H(B_p) \geqslant V(B_p)$.

Problème (HEC Techno 99)

On dispose d'une urne contenant deux boules, l'une numérotée 1, l'autre 2. On effectue, dans cette urne, une succession de tirages au hasard d'une boule en notant le numéro obtenu, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. La suite aléatoire des numéros tirés fournit ainsi une suite (X_n) de variables aléatoires de même loi vérifiant : $P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = \frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$; S_n désigne donc la somme des numéros obtenus au cours des n premiers tirages. Un entier naturel N non nul étant donné, on considère la variable aléatoire T_N égale au rang n où, pour la première fois, on a $S_n > N$. Par exemple si $N = 5$ et si les premiers numéros tirés sont $2, 1, 2, 1, 1, \ldots$ alors T_5 prend la valeur 4. De même, toujours si $N = 5$, si les premiers numéros tirés sont $2, 2, 2, 1, 2, \ldots$ alors T_5 prend la valeur 3.

Première partie : Préliminaires

1. On considère la suite réelle (v_n) définie par $v_1 = \frac{5}{6}$, $v_2 = \frac{11}{12}$ et, $\forall n \geqslant 1$, $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$.

   Montrer, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $v_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

2. On considère la suite réelle (w_n) définie par $w_1 = \frac{3}{2}$, $w_2 = \frac{9}{4}$ et, $\forall n \geqslant 1$, $w_{n+2} = \frac{1}{2}(w_{n+1} + w_n) + 1$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = w_n - \frac{2n}{3}$ vérifie les hypothèses de la question précédente et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de w_n en fonction de n.

Deuxième partie : Etude de la loi de T_N

1. **Exemples**
   (a) Donner les lois de T_1 et T_2 ainsi que leurs espérances et variances.
   (b) Montrer que les valeurs prises par T_5 sont 3, 4, 5, et 6, et calculer les valeurs des probabilités $P_{X_1=2}(T_5 = i)$ et $P_{X_1=1}(T_5 = i)$.
   (c) Déterminer la loi de T_5, calculer son espérance et sa variance.
   (d) Les évènements $X_1 = 1$ et $T_5 = 4$ sont-ils indépendants ? Interpréter la différence obtenue.

2. **Calcul de l'espérance de T_N**
   On revient au cas général où N désigne un entier naturel non nul.
   (a) i. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur prises par T_N dans le cas où N est pair ($N = 2M$).
   ii. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur prises par T_N dans le cas où N est impair ($N = 2M + 1$).
   (b) Soit k un entier naturel non nul. En distinguant deux cas selon le résultat du premier tirage, justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([T_{N+2} = k]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([T_{N+1} = k - 1]) + \frac{1}{2}\mathbf{P}([T_N = k - 1])$$
   (c) Prouver à l'aide de la relation précédente l'égalité : $\mathbf{E}(T_{N+2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}(T_N) + \mathbf{E}(T_{N+1})) + 1$.
   (d) À l'aide des résultats de la première partie, montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a :
   $$\mathbf{E}(T_N) = \frac{6N + 8}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^N$$
   Quelle est la limite de la suite de terme général $\frac{\mathbf{E}(T_N)}{N}$?
   Pour quelle raison ce résultat était-il prévisible ?

3. **La loi de T_N**
   On désigne toujours par N un entier naturel non nul.
   (a) Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'égalité : $\mathbf{P}([T_N > k]) = \mathbf{P}([S_k \leqslant N])$.
   On rappelle que $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
   En déduire l'égalité : $\mathbf{P}([T_N > k]) = \mathbf{P}([Z_k \leqslant N - k])$ où Z_k est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres k et $\frac{1}{2}$.
   (b) Établir l'égalité : $\mathbf{P}([T_N > k]) = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{N-k}\binom{k}{i}$.
   (c) Écrire explicitement (sous forme de tableau) la loi de T_{10}.