Devoir Surveillé n°6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

11 mars 2010

Exercice 1 (d'après EM Lyon 2003)

1. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie sans difficulté que $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3$.

2. Procédons par récurrence. C'est vrai pour $n = 1$, car $A = 1 \times A + 0 \times A^2$. On peut donc poser $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Supposons désormais que $A^n = a_nA + b_nA^2$, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(a_nA + b_nA^2) = a_nA^2 + b_nA^3$. En utilisant la relation obtenue à la question précédente, on a donc $A^{n+1} = a_nA^2 + b_n(A^2 + 2A) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$. La matrice A^{n+1} est donc de la forme souhaitée, en posant $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, ce qui achève la récurrence.

3.
```
PROGRAM suites ;
USES wincrt ;
VAR a,b,t : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
a := 1 ; b := 0 ;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
t := a ;
a := 2*b ;
b := t+b ;
END ;
WriteLn('a',n,'=',a,' et b',n,'=',b) ;
END.
```

4. En utilisant les relations de récurrence obtenues à la question 2, on a $b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = 2b_n + b_{n+1}$.

5. La suite (b_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristiques $x^2-x-2=0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et pour racines $r = \dfrac{1-3}{2} = -1$, et $s = \dfrac{1+3}{2} = 2$. On a donc $b_n = \alpha(-1)^n + \beta \times 2^n$. Comme par ailleurs $b_1 = 0$, et $b_2 = 1$ (puisque $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$), on en déduit que $-\alpha + 2\beta = 0$, soit $\alpha = 2\beta$; et $\alpha + 4\beta = 1$, soit $6\beta = 1$, donc $\beta = \dfrac{1}{6}$, puis $\alpha = \dfrac{1}{3}$, et enfin $b_n = \dfrac{(-1)^n}{3} + \dfrac{2^n}{6} = \dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}$. On a ensuite $a_n = 2b_{n-1} = \dfrac{2^{n-1}+2(-1)^{n-1}}{3}$.
6. Finalement, on a $A^n = \dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}A^2 + \dfrac{2^{n-1}+2(-1)^{n-1}}{3}A$. Pour $n=8$, on a donc $A^8 = \dfrac{2^7+1}{3}A^2 + \dfrac{2^7-2}{3}A = \dfrac{129}{3}A^2 + \dfrac{126}{3}A = 43A^2 + 42A = \begin{pmatrix} 171 & 85 & 85 \\ 85 & 43 & 43 \\ 85 & 43 & 43 \end{pmatrix}$.
7. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a $AM = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a+b+c & a & a \\ d+e+f & d & d \\ g+h+i & g & g \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, on doit avoir en observant les quatre coeffcicients en bas à droite $b=c=d=g$. Puis, en prenant le coefficient en haut à gauche, on obtient $a+d+g = a+b+c$, ce qui est toujours vrai d'après les égalités précédentes. Enfin, les quatre derniers coefficients donnent : $a = b+e+h = c+f+i = d+e+f = g+h+i$. En remplaçant c, d et g par b, on a donc $a = b+e+h = b+f+i = b+e+f = b+h+i$, soit encore $a-b = e+h = f+i = e+f = h+i$. Comme $e+h = e+f$, alors $f = h$, puis $e+h = f+i$ donne $e = i$. Toutes les égalités se réduisent alors à $a-b = e+f$, soit $a = b+e+f$. Finalement, les matrices convenant sont de la forme $M = \begin{pmatrix} b+e+f & b & b \\ b & e & f \\ b & f & e \end{pmatrix}$, avec $b, e, f \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Première partie

1. On a $a_3 = \dfrac{1}{8}$ (un seul tirage gagnant sur les 8 possibles : PPF). Pour que A_4 se réalise, il faut que les trois derniers tirages soient PPF, mais le premier tirage ne peut être Face, sinon le joueur B aurait gagné au troisième tour. Il ne reste donc que la possibilité $PPPF$, soit $a_4 = \dfrac{1}{16}$.
2. Dans le cas général, il faut toujours finir par PPF, et on ne peut pas avoir de Face précédant ces deux Pile sinon le joueur B aurait gagné à un des tirages précédents. Il

n'y a donc que le tirage $P \dots PPF$ qui fasse gagner le joueur A, soit une probabilité de $\dfrac{1}{2^n}$.

3. Il suffit d'additionner les probabilités de tous les événements A_n : $P(A) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.

4. La probabilité d'un match nul étant nulle, il reste une probabilité $\dfrac{3}{4}$ que ce soit B qui gagne. Conclusion, il vaut largement mieux être dans la peau du joueur B (bien qu'on puisse penser au premier abord que PPF et FPP sont plus ou moins équivalents).

Deuxième partie

1. On a clairement $d_1 = 1$ puisqu'on ne risque pas d'obtenir deux Pile de suite après un seul tirage. Après deux tirages, une seule possibilité sur les quatre amène une succesion de deux Pile, donc $d_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Enfin, après trois tirages, trois possibilités sur 8 vont donner deux Pile (ce sont les tirages PPP, PPF et FPP), donc $d_3 = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$.
2. Les événements F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements (ils sont disjoints et on est bien obligé de commencer par F, par PF ou par PP), donc $D_{n+2} = D_{n+2} \cap F_1 \cup D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2 \cup D_{n+2} \cap P_1 \cap P_2$. Or, ce dernier ensemble est vide puisque $P_1 \cap P_2$ est incompatible avec D_{n+2} par définition. Il ne reste donc que l'union de deux ensembles annoncée. Or, $P(D_{n+2} \cap F_1) = \dfrac{1}{2} d_{n+1}$ (probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'avoir Face au départ et ensuite il ne faut pas avoir Pile sur les $n+1$ lancers restants) et de même $P(D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2) = \dfrac{1}{4} d_n$, d'où la formule de récurrence.
3. On a bien $d_1 = 1 \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^0$ et $d_2 = \dfrac{3}{4} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^1$. Supposons que $d_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ et $d_n \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}$, on a alors d'après la question précédente $d_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6}{7}\right)^n + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{7} + \dfrac{1}{4}\right)$. Or, $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{7} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{6}{14} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{19}{28} = \dfrac{133}{196}$ et $\left(\dfrac{6}{7}\right)^2 = \dfrac{36}{49} = \dfrac{144}{196}$. On a donc $d_{n+2} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^2 \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.
4. La série a un terme général positif, et ses sommes partielles sont majorées par $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n$, qui converge (c'est une série géométrique) vers $\dfrac{1}{1-\frac{6}{7}} = 7$. On en déduit la convergence de la série de terme général d_k, et de plus $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \leqslant 7$.

5. En sommant la relation de récurrence entre $k=1$ et $k=n$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} d_{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} d_{k+1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} d_k$, soit après changement d'indices $\sum_{k=3}^{n+2} d_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} d_k + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} d_k$. Attention, il manque des termes aux deux premières sommes pour faire apparaitre S_{n+2} et S_{n+1}. On a plus précisément $S_{n+2} - d_1 - d_2 = \frac{1}{2}(S_{n+1} - d_1) + \frac{1}{4}S_n$, soit $S_{n+2} - 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}S_{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}S_n$, donc $S_{n+2} = \frac{1}{2}S_{n+1} + \frac{1}{4}S_n + \frac{5}{4}$. Comme la série converge, les trois suites S_n, S_{n+1} et S_{n+2} convergent vers la même limite S (somme de la série), donc en passant à la limite $S = \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{5}{4}$, donc $\frac{1}{4}S = \frac{5}{4}$. On obtient bien $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = 5$.

Troisième partie

1. On a bien sûr $P(T_1) = P(T_2) = 0$, puisqu'il faut attendre au moins trois tirages pour que PPF ou FPP apparaisse. Quand à T_3, il est réalisé si un de ces tirages apparait, soit $P(T_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
2. Remarquons que si une série d'au moins deux Pile apparait, elle verra la victoire d'un des joueurs dès qu'elle est interrompue par un Face, que ce soit à sa gauche ou à sa droite. Pour qu'aucun joueur ne gagne, il faut donc, soit qu'il n'y ait pas de série de deux Piles (probabilité d_n), soit qu'il n'y ait que des Pile (probabilité $\frac{1}{2^n}$), d'où la formule.
3. On a $C_{n-1} = C_n \cup T_n$ (si personne n'a gagné après $n-1$ tirages, soit quelqu'un gagne juste après, soit non), et ces deux événements sont incompatibles, donc $P(C_{n-1}) = P(C_n) + P(T_n)$ et $P(T_n) = P(C_{n-1}) - P(C_n) = \frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \frac{1}{2^n} - d_n = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.
4. On a donc $\sum_{k=3}^{n} P(T_k) = d_2 - d_n + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^k}$ (il y a un télescopage sur les d_k). Comme $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$ (puisque la série de terme général d_n converge) et comme la série de terme général $\frac{1}{2^k}$ converge (série géométrique), cette sommé partielle a une limite, qui vaut $d_2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + 2 - \frac{7}{4} = 1$ (il manque les premiers termes de la somme de droite). Cette somme représente la probabilité qu'un des deux joueurs gagne. Il reste donc une probabilité nulle qu'il y ait match nul.