Devoir Surveillé n°6

ECE3 Lycée Carnot

11 mars 2010

Durée : 2H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (d'après EM Lyon 2003)

On considère dans cet exercice les matrices carrées réelles d'ordre trois suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de réels tel que $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n choisi par l'utilisateur.
4. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$.
5. En déduire a_n et b_n en fonction de n.
6. Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n. Écrire explicitement la matrice A^8.
7. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$ (question indépendante du reste de l'exercice).

Exercice 2

On considère une suite infinie de lancers de pièce équilibrée à Pile ou Face. On note P_n et F_n les événements : « On obtient Pile (respectivement Face) au n-ème lancer ».

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : A gagne si la séquence PPF apparait avant la séquence FPP lors de cette suite de tirages ; B gagne si la séquence FPP apparait avant la séquence PPF (si aucune des deux séquences n'apparait dans la suite de tirages, il y a match nul).

Première partie

On note A_n l'événement « Le joueur A gagne à l'issue du n-ème lancer (et personne ne gagne avant) » et a_n sa probabilité. De même, on note B_n et b_n pour le cas où c'est le joueur B qui gagne après le $n$ème lancer.

1. Calculez a_3 et a_4.
2. Dans le cas général ($n \geqslant 3$), explicitez tous les tirages pour lesquels A gagne au $n$ème lancer (il n'y en a pas beaucoup ...). En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.
3. En déduire la probabilité de l'événement A : « Le joueur A gagne la partie ».

4. On admet que la probabilité que personne ne gagne est nulle (cf troisième partie). Quelle est la probabilité que B gagne ? Conclusion ?

Deuxième partie

On note dans cette partie D_n l'événement « On n'obtient jamais deux Piles consécutifs lors des n premiers lancers » et d_n sa probabilité.

1. Calculez d_1, d_2 et d_3 (pour d_3, un bête dénombrement suffira).
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_1) \cup (D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2)$, et en déduire que $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $d_n \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^n$ (on pourra faire une récurrence double et utiliser la relation précédente).
4. En déduire que la série de terme général d_n converge et une majoration de sa somme.
5. Montrez que, si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$, on a $S_{n+2} = \frac{1}{2}S_{n+1} + \frac{1}{4}S_n + \frac{5}{4}$. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = 5$.

Troisième partie

On note C_n l'événement « Aucun des deux deux joueurs n'a gagné à l'issue du n-ème lancer » et T_n l'événement « Un des deux joueurs gagne à l'issue du $n$ème lancer (mais personne n'avait gagné avant) ».

1. Calculez les probabilités des événements T_1, T_2 et T_3.
2. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $P(C_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$.
3. En déduire l'égalité $P(T_n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.
4. Montrez que la série de terme général $P(T_n)$ converge, calculer sa somme et en déduire que l'événement « Aucun des deux joueurs ne gagne » est de probabilité nulle.