Devoir Surveillé n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

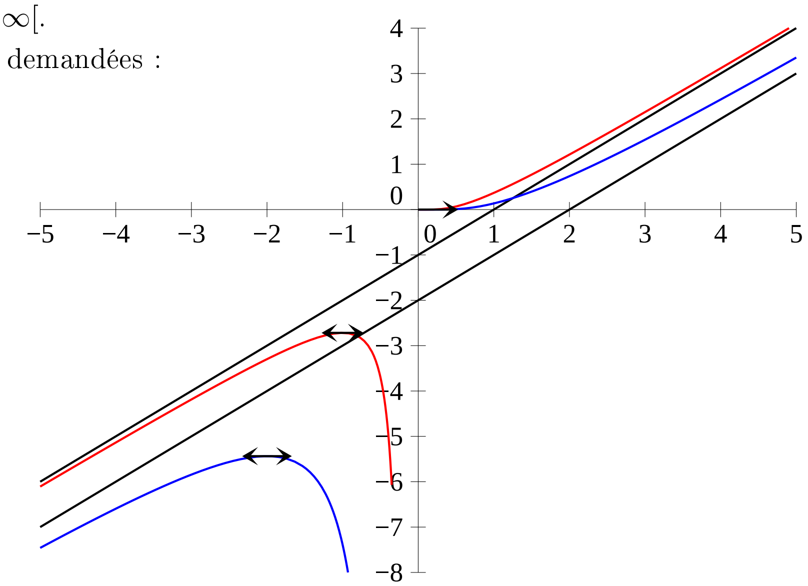
10 février 2010

Problème 1

1. Il suffit de prouver que $\lim_{x\to 0^+} xe^{-\frac{n}{x}} = 0$, ce qui ne pose pas de problème puisque $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = -\infty$. Le seul cas très particulier se produit quand $n = 0$, où on a $f_0(x) = x$, qui a également pour limite 0 en 0. Pour la dérivabilité, commençons par préciser que f_n est dérivable et C^1 sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f_n'(x) = e^{-\frac{n}{x}} + x \times \frac{n}{x^2}e^{-\frac{n}{x}} = \left(1+\frac{n}{x}\right)e^{-\frac{n}{x}}$. Cette dérivée a pour limite 0 en 0 si $n \geqslant 1$ en utlisant la croissance comparée, et 1 si $n = 0$. Dans les deux cas, le théorème de prolongement C^1 permet de prouver la dérivabilité de f_n en 0.
2. D'après le calcul de dérivée de la question précédente, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Sur $]-\infty;0[$, la dérivée s'annule pour $x = -n$, valeur qui représente un maximum local pour la fonction f_n, de valeur $f_n(-n) = -ne$. Les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$ sont respectivement égales à $+\infty$ et $-\infty$ puisque $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 1$. Enfin, en 0^-, en posant $X = -\frac{1}{x}$, on a $f(x) = -\frac{e^{nX}}{X}$, avec X qui tend vers $+\infty$, donc par croissance comparée $\lim_{x\to 0^-} f_n(x) = -\infty$ (encore une fois, cas particulier si $n = 0$, la limite vaut alors 0). D'où le tableau pour $n \geqslant 1$:

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-ne$	$\searrow$	$-\infty$ || 0	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a déjà signalé les limites infinies en $\pm\infty$. De plus, $\frac{f_n(x)}{x} = e^{-\frac{n}{x}}$ a pour limite 1 en $\pm\infty$. Reste donc à calculer $f(x) - x = x(e^{-\frac{n}{x}} - 1)$. Comme $\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{n}{x} = 0$, on peut utiliser l'équivalent classique de l'exponentielle en 0, ce qui donne $f_n(x) - x \underset{\pm\infty}{\sim} x \times \frac{-n}{x} = -n$. Autrement dit, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = -n$, et la courbe $\mathcal{C}_n$ admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x - n$ en $+\infty$ comme en $-\infty$.
4. Calculons donc la dérivée seconde de f_n : $f_n''(x) = \left(-\frac{n}{x^2} + \left(1+\frac{n}{x}\right) \times \frac{n}{x^2}\right)e^{-\frac{n}{x}} = \frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{x}}$. Cette dérivée seconde est du signe de x^3, donc de x, ce qui signifie que f est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $[0;+\infty[$.
5. Voici les courbes demandées :



6. (a) Sur $]-\infty;0[$, la fonction f_n admet un miminum qui est négatif, l'équation $f_n(x)=1$ ne peut donc avoir de solution négative. Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_n est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, donc l'équation $f_n(x)=1$ admet une unique solution positive.

   (b) Calculons $f_n(1)=e^{-n}$. Si $n\geqslant 1$, $-n<0$, donc $e^{-n}<1$ et par croissance de la fonction f_n, $1<u_n$. De plus, comme u_n est solution de l'équation $xe^{-\frac{x}{n}}=1$, un simple passage au ln montrer que u_n est également solution de l'équation $\ln x-\dfrac{n}{x}=0$, soit $x\ln x-n=0$, donc $x\ln x=n$.

   (c) La fonction g est définie et C^∞ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $g'(x)=\ln x+1$. Elle est donc décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$, avec pour limite 0 en 0 (limite classique) et $+\infty$ en $+\infty$, et pour minumum $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$. La fonction g est notamment bijective de $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ dans $\left[-\dfrac{1}{e};+\infty\right[$, de réciproque g^{-1} strictement croissante et vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty}g^{-1}(x)=+\infty$. Comme $u_n=g^{-1}(n)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

   (d) Il suffit d'appliquer un nouveau coup de ln à l'équation obtenue à la question b (on peut le faire si $n\geqslant 1$ puisque $u_n>1$) pour obtenir $\ln u_n+\ln(\ln u_n)=\ln n$. Comme u_n tend vers $+\infty$, $\ln(\ln u_n)=o(\ln u_n)$, et $\ln u_n\sim\ln n$. Or, on a $u_n=\dfrac{n}{\ln u_n}$, on peut donc en déduire que $u_n\sim\dfrac{n}{\ln n}$.

7. (a) On a vu plus haut que $f_1(x)-x=x(e^{-x}-1)$. Si $x\geqslant 0$, $e^{-x}\leqslant 1$, donc $f_1(x)-x\leqslant 0$, avec égalité seulement si $x=0$. Autrement dit, 0 est le seul point fixe de f_1 sur $\mathbb{R}_+$, et $\mathcal{C}_1$ est toujours située sous la droite d'équation $y=x$.

   (b) La fonction f_1 est croissante sur $[0;1]$, $f_1(0)=0$ et $f_1(1)=\dfrac{1}{e}-1<1$, donc $[0;1]$ est un intervalle stable par f_1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $v_n\in[0;1]$. C'est vrai pour v_0 puisque $v_0=1$. Supposons $v_n\in[0;1]$ alors d'après le calcul précédent $f(v_n)\in[0;1]$, c'est-à-dire que $v_{n+1}\in[0;1]$, ce qui achève la récurrence.

   (c) Comme $f(x)-x\leqslant 0$ sur $[0;1]$, on aura $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=f(v_n)-v_n\leqslant 0$, ce qui prouve la décroissance de la suite (v_n).

   (d) La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Comme sa limite doit être un point fixe de la fonction f_1, ce ne peut être que 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

Problème 2

1. (a) C'est une équation du second degré, qu'on sait très bien résoudre : $\Delta=1+4=5$, $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution est manifestement négative, quant à la première, on peut l'encadrer en partant de $4<5<9\Rightarrow 2<\sqrt{5}<3$, donc $\dfrac{1}{2}<x_1<1$. il y a donc bien une solution unique à l'équation sur l'intervalle $]0;1[$.

   (b) Si $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, on a $\dfrac{3}{2}\leqslant x+1\leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{2}{3}$. Comme $\dfrac{2}{3}<1$, on a a fortiori $\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

   (c) La fonction f est bien sûr dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$. En reprenant la question précédente, si $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x+1}\leqslant\dfrac{2}{3}$, donc en élevant au carré (tout est positif), $\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{(x+1)^2}\leqslant\dfrac{4}{9}$, soit $\dfrac{1}{2}\leqslant|f'(x)|\leqslant\dfrac{4}{9}$.

   (d) PROGRAM facile ;
   USES wincrt ;
   VAR u : real ; i,n : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;

```
ReadLn(n) ;
u := 1 ;
FOR i := 1 TO n DO u := 1/(u+1) ;
WriteLn(u) ;
END.
```

(e) C'est une récurrence assez facile : $u_0 = 1$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Supposons désormais que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, on a d'après la question b $\frac{1}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$, soit $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

(f) On sait que r_2 vérifie $r_2^2+r_2-1=0$, soit $r_2(r_2+1)=1$, donc $r_2 = \dfrac{1}{r_2+1}$ ou encore $f(r_2)=r_2$.

(g) Commençons par appliquer l'IAF à $x = u_n$ et $y = r_2$, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ (cf questions précédentes), sur lequel on a vu que $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$. On peut donc affirmer que $|f(u_n)-r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n-r_2|$, soit $|u_{n+1}-r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n-r_2|$.

Montrons désormais par récurrence la propriété P_n : $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Pour $n=0$, $|u_0 - r_2| = |1-r_2| \leqslant 1$ car $r_2 \in]0;1[$, ce qui prouve P_0. Si on suppose P_n vérifiée, on peut faire le calcul suivant en utilisant successivement le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1}-r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n-r_2| \leqslant \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Cette dernière inégalité prouve P_{n+1} et achève donc la récurrence.

Comme $\frac{4}{9} < 1$, la suite $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge vers 0, et le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - r_2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = r_2$.

(h) On sait que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ si $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant \varepsilon$, soit en passant au ln, $n \ln \frac{4}{9} \leqslant \ln \varepsilon$, ou encore $n \geqslant \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 4 - \ln 9}$ (on change le sens de l'inégalité puisque $\ln \frac{4}{9}$ est négatif). Un programme possible est le suivant :

```
PROGRAM moinsfacile ;
USES wincrt ;
VAR u,e,a : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez une valeur positive pour epsilon') ;
ReadLn(e) ;
u := 1 ; a := 1 ;
REPEAT
u := 1/(u+1) ;
a := 4*a/9 ;
UNTIL a < e ;
WriteLn('Une valeur approchée de r2 à ',e,' près est ',u) ;
END.
```

2. (a) Cette fois-ci, on ne sait pas résoudre l'équation, il faut donc étudier un peu le polynome $x^3 + x^2+x-1$. Sa dérivée est $3x^2+2x+1$, qui a un discriminant négatif et est donc toujours positive. La fonction $x \mapsto x^3+x^2+x-1$ est donc strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$. Comme elle prend la valeur -1 pour $x=0$ et la valeur 2 pour $x=1$, on en déduit qu'elle s'annule entre 0 et 1. L'équation proposée a donc une unique solution (àa cause de la bijectivité) qui appartient à l'intervalle $]0;1[$.

(b) Le trinome x^2+x+1 étant strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$, on aura, si $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, $f(1^\circ \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1} < 1$, on aura bien $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.

(c) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ayant un discriminant négatif, il ne s'annule jamais), et $g'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; et en dérivant g' comme un produit,

$$g''(x) = -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$$

$= \dfrac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. Cette dérivée seconde étant toujours positive sur $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$, la dérivée g' y est strictement croissante. Comme $g'\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\frac{2}{3}+1}{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1)^2} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \dfrac{135}{169}$ et $g'(1) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$, on peut en déduire que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{3};1\right]$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{135}{169}$.

(d) On aimerait appliquer l'IAF à $x = r_3$ et $y = v_n$ en utilisant la majoration de $|f'(x)|$ obtenue à la question précente. Il faut pour cela vérifier que v_n est toujours dans cet intervalle, ce qui se fait en utilisant la stabilité de l'intervalle par une récurrence identique à celle de la question 1.f ; et que $r_3 \in \left[\dfrac{1}{3};1\right]$ et est un point fixe de g. Comme $\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3}-1 = \dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}-1 = -\dfrac{14}{27} < 0$, on a effectivement $r_2 \geqslant \dfrac{1}{3}$ (cf étude de la question a). De plus, $r_3^3+r_3^2+r_3-1 = 0 \Rightarrow r_3(r_3^2+r_3+1) = 1 \Rightarrow r_3 = f(r_3)$, donc r_3 est un point fixe de f. On peut donc bien appliquer l'IAF pour obtenir $|f(v_n) - f(r_3)| \leqslant \dfrac{135}{169}|v_n - r_3|$, soit $|v_{n+1} - r_3| \leqslant \dfrac{135}{169}|v_n - r_3|$.

On fait ensuite notre petite récurrence classique pour prouver que $|u_n - r_3| \leqslant \left(\dfrac{135}{169}\right)^n$ (comme dans la question 1.g, on majore $|v_0 - r_3|$ par 1 en utilisant que $\dfrac{1}{3} \leqslant r_3 \leqslant 1$, et le reste de la récurrence est identique en remplaçant les $\dfrac{4}{9}$ par des $\dfrac{135}{169}$).

La conclusion est également la même : $\dfrac{135}{169} < 1$ donc le membre de droite de notre inégalité tend vers 0, et en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - r_3| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = r_3$.

3. (a) La fonction h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$. La fonction h_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle y est bijective. Comme $h_n(0) = -a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ a bien une solution (unique par bijectivité) sur $[0;+\infty[$. De plus, on a $h_n(1) = n - a$, donc $h_n(1) > 0$ si $n > a$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, h_n s'annule alors sur l'intervalle $]0;1[$ et $t_n \in]0;1[$.

(b) C'est un simple calcul : $(x-1)h_n(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x^3 + x^2 - ax - x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x + a = x^{n+1} - ax - x + a = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

(c) Notons que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + h_n(x)$. Comme $h_n(t_n) = 0$ (par définition), on a donc $h_{n+1}(t_n) = t_n^{n+1} > 0$, donc $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$. Comme par ailleurs on a aussi, toujours par définition, $h_{n+1}(t_{n+1}) = 0$, on en déduit que $h_{n+1}(t_n) > h_{n+1}(t_{n+1})$. La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cela implique $t_n > t_{n+1}$, et la suite (t_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

(d) On vient de voir que la suite (t_n) était décroissante, donc $\forall A \geqslant n$, $0 < t_n \leqslant t_A$, et comme t_n et t_A sont tous deux strictement inférieurs à 1, $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$. Fixons donc $A \geqslant a$ (de façon à ce que t_A soit une constante). Comme $t_A < 1$ dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_A^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n^n = 0$.

(e) En reprenant la relation obtenue à la question b et en l'appliquant pour $x = t_n$, on obtient $0 = t_n^{n+1} - (a+1)t_n + a$, soit $(a+1)t_n - a = t_n \times t_n^n$. Le membre de droite convergeant vers 0 d'après la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (a+1)t_n - a = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{a}{a+1}$.