Devoir Surveillé n°5

ECE3 Lycée Carnot

10 février 2010

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Problème 1 (d'après EDHEC 2004)

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f_n par $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$, et $f_n(0) = 0$. On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

1. Montrer que f_n est continue à droite en 0, et dérivable à droite en 0.
2. Étudier les variations de f_n, ainsi que ses limites en $+\infty$, $-\infty$ et 0^+, et dresser son tableau de variations.
3. Étudier les branches infinies de la fonction f_n (on pourra utiliser l'équivalent classique $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$).
4. Étudier la convexité de la fonction f_n.
5. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
6. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n > 1$, et u_n est solution de l'équation $x \ln x = n$.
   (c) Étudier la fonction g définie par $g(x) = x \ln x$, et en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (d) Montrer que $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, et en déduire un équivalent simple pour u_n.
7. Dans cette question, on ne s'intéresse plus qu'à la fonction $f_1 : x \mapsto xe^{-x}$ (toujours prolongée par $f_1(0) = 0$). On définit par ailleurs une suite (v_n) par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f_1(v_n)$.
   (a) Déterminer le signe de $f_1(x) - x$ et les éventuels points fixes de f_1 sur $[0; +\infty[$.
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0; 1]$.
   (c) Étudier la monotonie de la suite (v_n).
   (d) En déduire que (v_n) converge et préciser sa limite.

Problème 2 (d'après ESSEC 2002)

Le but de ce problème est d'étudier numériquement les solutions d'équations du type $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = a$.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$.

   On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

   (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0;1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2.

   (b) Montrer que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

   (c) Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$.

   (d) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Écrire un programme PASCAL calculant la valeur de u_n pour un entier n choisi par l'utilisateur.

   (e) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

   (f) Prouver que r_2 est un point fixe de la fonction f.

   (g) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de la suite (u_n) vers r_2.

   (h) Soit ε un réel strictement positif. Déterminer un entier n pour lequel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Écrire un programme PASCAL déterminant une valeur approchée de r_2 à ε près (ε choisi par l'utilisateur).

2. **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

   On considère désormais la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

   (a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution r_3 appartenant à $]0;1[$.

   (b) Montrer que l'intervalle $\left[\frac{1}{3};1\right]$ est stable par g.

   (c) Calculer les dérivées g' et g'' et déterminer le maximum de $|g'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3};1\right]$.

   (d) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Majorer $|v_n - r_3|$ en fonction de n, et prouver la convergence de (v_n) vers r_3.

3. **Racine positive de l'équation** $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$.

   On désigne désormais par a un réel strictement positif, et on note, pour tout entier $n \geqslant 2$, h_n la fonction définie par $h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

   (a) Montrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ possède une unique racine qu'on notera t_n, puis que $t_n \in]0;1[$ si $n > a$.

   (b) Montrer que $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

   (c) Montrer que $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$, et en déduire que la suite (t_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers une limite qu'on notera désormais α.

   (d) Montrer que, si $A \in \mathbb{N}$, on aura $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$ si $n \geqslant A$. En déduire, en choisissant $A > a$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.

   (e) Exprimer la limite α en fonction de a.