Devoir Surveillé n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

1er décembre 2009

Exercice 1

1. Il faut choisir les quatre cases noires dans un ensemble de 24 cases, il y a donc $\binom{24}{4}$ grilles possibles.
2. Il y a quatre possibilités pour le coin, et il reste en suite à noircir trois cases parmi les 20 qui ne sont pas des coins, soit $4 \times \binom{20}{3}$ possibilités.
3. Il suffit de choisir, dans chaque colonne, quelle case (parmi six possibles) va être noircie, soit 6^4 choix possibles.
4. Comptons les grilles n'ayant pas de case noire sur la première ligne : il y en a $\binom{18}{4}$ (il ne reste que 18 cases sur les trois dernières lignes). Par passage au complémentaire, il y a donc $\binom{24}{4} - \binom{18}{4}$ grilles avec au moins une case noire sur la première ligne.
5. Il faut choisir les quatre lignes (parmi six possibles) et à l'interieur de chaque ligne, la case à noircir sur quatre disponibles, soit $\binom{6}{4} \times 4^4$ possibilités.
6. C'est le même principe que la question précédente, sauf qu'on a 4 choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, mais plus que 3 sur la deuxième ligne, 2 sur la troisième ligne et un seul sur la dernière. Le nombre de grilles cherché est donc $\binom{6}{4} \times 4! = 360$.

1. On a désormais k cases à noircir sur un total de np, donc $\binom{np}{k}$ grilles possibles.
2. Il reste $k-4$ cases à noircir parmi $np-4$, donc $\binom{np-4}{k-4}$ (naturellement, on doit avoir $k \geqslant 4$).
3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir $k-2$ cases parmi les $np-4$ qui ne sont pas des coins, donc $\binom{4}{2} \times \binom{np-4}{k-2}$ possibilités.
4. Cela suppose que $k \leqslant n$. Il faut alors choisir les k lignes contenant une case parmi les n possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes p choix pour la case à noircir, donc $\binom{n}{k} \times p^k$ grilles possibles.
5. La grille a donc n lignes et n colonnes, et on cherche à noircir une case par ligne, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a n choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, $n-1$ choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première), $n-2$ pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ grilles possibles.
6. On aurait 9! choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer un raisonnement similaire à celui de la question précédente :
   - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
   - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
   - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
   - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).

– 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).
– 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
– 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
– 2 et 1 pour les deux dernières.
Soit $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$ façons de placer les 1.

7. Au total, il y a $\binom{81}{9}$ façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. Le proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !

Exercice 2

1. Il n'y a qu'une seule partition de E_1. Pour E_2, on a deux possibilités : soit regrouper les deux éléments (un seul sous-ensemble dans la partition), soit les séparer (deux sous-ensembles). Enfin, pour E_3, on peut regrouper les trois éléments (un seul sous-ensemble), les séparer tous les trois, ou faire une partition en deux sous-ensembles dont l'un contient un élément et l'autre les deux qui restent (trois possibilités selon le choix de l'élément isolé). Il y a donc cinq partitions différentes de E_3.
2. S'il y a n sous-ensembles non vides et disjoints, chacun doit comporter exactement un élément, et il n'y a donc qu'une seule partition possible. S'il y a $n-1$ sous-ensembles, ils contiennent tous un élément, sauf un qui en contient deux. Il faut donc choisir quels sont les deux éléments qui sont regroupés, ce qui laisse $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ partitions.
3. Il y a deux types de partitions : celles qui ont 7 sous-ensembles réduits à un élément et le huitième qui en contient 3 (au nombre de $\binom{10}{3}$, de manière similaire à la question précédente) ; et celles qui ont 6 sous-ensembles réduits à deux éléments et les deux derniers qui en contiennent 2. Ces dernières sont au nombre de $\frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ (il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, les deux du deuxième parmi ceux qui restent, et diviser par deux car l'ordre n'est pas important). Au total donc, $\binom{10}{3} + \frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ partitions.
4. Le même raisonnement conduit à $\binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.
5. (a) Il faut tout simplement choisir l'élément isolé, et il y a n possibilités pour cela, ou si l'on préfère $\binom{n}{1}$ possibilités.
   (b) De la même façon, il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, soit $\binom{n}{2}$ partitions possibles.
   (c) En général, on aura $\binom{n}{k}$ partitions en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments. Attention tout de même, k est compris entre 1 (le premier ensemble n'a pas le droit d'être vide) et $n-1$ (le deuxième ne doit pas être vide non plus !). Autre piège, si on fait la somme pour k variant entre 1 et $n-1$, on compte en fait deux fois chaque partition (en effet, on obtient la même partition en échangeant le rôle du premier et du deuxième ensemble : par exemple, les partitions obtenues pour $k=1$ sont les mêmes que celles obtenues pour $k=n-1$). Il y a donc au total $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n-1}\binom{n}{k} = \frac{1}{2}(2^n-2) = 2^{n-1}-1$ partitions en deux sous-ensembles.
6. (a) Si E est constitué de $2 \times 1 = 2$ éléments, il n'y a qu'une façon de le partitionner en sous-ensembles à deux éléments, donc $a_1 = 1$. Si E a quatre éléments, on peut le partitionner de trois façons en deux paires (il faut choisir qui on case avec le premier élément, l'autre paire est alors imposée), donc $a_2 = 3$. Enfin, si E contient 6 éléments, on a cinq choix pour l'élément à caser avec 1, et ensuite trois possibilités à chaque fois pour apparier les quatre éléments restants, donc $a_3 = 5 \times 3 = 15$.
   (b) On fait comme ci-dessus : si E contient $n = 2p$ éléments, on commence par choisir l'élément qu'on va apparier avec 1, ce pour quoi on a $n-1 = 2p-1$ choix. Une fois ce choix fait, il reste à partitionner les $n-2 = 2p-2 = 2(p-1)$ éléments restants en paires, ce pour quoi on a par définition a_{p-1} possibilités. Cela laisse bien $(2p-1)a_{p-1}$ possibilités pour séparer E en paires, donc $a_p = (2p-1)a_{p-1}$.

(c)
```
PROGRAM suite;
USES wincrt;
VAR p,i : integer; a : longint;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de l'entier p');
ReadLn(p);
a := 1;
FOR i :=2 TO p DO
a := (2*i-1)*a;
WriteLn('Le nombre de façons de partitionner un ensemble à ',p,' éléments en paires est ',a);
END.
```

(d) D'après la question précédente, on a $a_p = (2p-1) \times a_{p-1} = (2p-1) \times (2p-3)a_{p-2} = (2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 5 \times 3$ (ce qui est cohérent avec les calculs de a_2 et a_3). Autrement dit $a_p = \dfrac{(2p) \times (2p-1) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2} = \dfrac{(2p)!}{2 \times p \times 2 \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

(e) Le nombre demandé est exactement $a_{10} = \dfrac{20!}{2^{10} \times 10!} = 19 \times 17 \times \cdots \times 5 \times 3 = 654\ 729\ 075$. Si on ne considère que des couples hétéro avec 10 filles et 10 garçons, la première fille (soyons galants) a 10 choix pour son compagnon, la deuxième n'en a plus que 9 etc, et la dernière fille n'a plus le choix (ceci n'est pas censé modéliser ce qui se passe dans la vraie vie), soit $10! = 3\ 628\ 800$ possibilités. Autrement dit, si on apparie aléatoirement 10 filles et 10 garçons, on à peine plus d'une chance sur 200 d'obtenir dix couples hétérosexuels.

Problème : algorithme de Babylone et fractions continues

Première partie :

1. C'est une récurrence assez simple : c'est vrai pour p_0 et q_0 qui sont égaux à 1, et si on suppose que p_n et q_n sont deux entiers strictement positifs, $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ le seront certainement aussi, ce qui achève la récurrence.
2. On calcule $p_1 = 3$, $q_1 = 2$, $p_2 = 7$, $q_2 = 5$, $p_3 = 17$ et $q_3 = 12$, d'où $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{7}{5}$ et $u_3 = \dfrac{17}{12}$.
3. Même pas besoin de récurrence : comme $q_n > 0$, on a toujours $p_n + 2q_n > p_n + q_n$, soit $p_{n+1} > q_{n+1}$. Le seul cas d'égalité est obtenu pour p_0 et q_0.
4. On a $p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2p_n + 2q_n$. Or, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ donc $2q_n = p_{n+1} - p_n$. On en déduit que $p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n + p_{n+1} - p_n = 2p_{n+1} + p_n$.
5. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et il y a deux racines $r = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $s = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$. La suite est donc de la forme $p_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$, avec $p_0 = \alpha + \beta = 1$, et $p_1 = (1+\sqrt{2})\alpha + (1-\sqrt{2})\beta = 3$. On obtient donc $\beta = 1 - \alpha$, puis $(1+\sqrt{2})\alpha + 1 - \sqrt{2} - (1-\sqrt{2})\alpha = 3$, soit $2\sqrt{2}\alpha = 2 + \sqrt{2}$. Finalement, $\alpha = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, donc $p_n = \dfrac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1})$.
6. En effet, $q_{n+2} = q_{n+1} + p_{n+1} = q_{n+1} + 2q_n + p_n$, avec $p_n = q_{n+1} - q_n$, donc $q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$. L'équation caractéristique n'ayant pas changé depuis tout à l'heure, il faut désormais déterminer α' et β' tels que $\alpha' + \beta' = 1$, et $\alpha'(1+\sqrt{2}) + \beta'(1-\sqrt{2}) = 2$, soit $\alpha'(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} = 2$, et $\alpha' = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, puis $\beta' = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$. On obtient finalement $q_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1})$.
7. Tout cela nous donne $u_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}$. Comme $|1+\sqrt{2}| < 1$ et $1 + \sqrt{2} > 1$, numérateur et dénominateur du deuxième quotient sont équivalents à $(1+\sqrt{2})^{n+1}$, donc le quotient a pour limite 1. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Deuxième partie :

1. On calcule $v_1 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$, puis $v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$, et enfin $v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} \simeq 1.414$
2. La suite est définie si $v_n \neq 0$, donc prouver par récurrence que $v_n \in [1;2]$ suffit. C'est vrai pour v_0, et si on le suppose vrai pour v_n, on a alors $\frac{2}{v_n} \in [1;2]$ également, donc $v_n + \frac{2}{v_n} \in [2;4]$, et $v_{n+1} \in [1;2]$, ce qui achève la récurrence.
3. On a $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2-2}{2x^2}$. Cette dérivée s'annule pour $x = \sqrt{2}$, la fonction f est décroissante sur $]0;\sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$.
4. Si $f(x) = x$, on a donc $x + \frac{2}{x} = 2x$, soit $\frac{2}{x} = x$. Comme $x \neq 0$, on obtient $x^2 = 2$, soit $x = \sqrt{2}$. La suite (v_n) ne peut avoir pour limite que $\sqrt{2}$.
5. Par un calcul similaire, $f(x) - x$ est positif sur $[0;\sqrt{2}]$, et négatif sur $[\sqrt{2};+\infty[$.
6. C'est une simple application du tableau de variations : si $x \leqslant \sqrt{2}$, $f(x) \geqslant \sqrt{2}$, et vice-versa. Comme $v_{n+1} = f(u_n)$, les propriétés demandées en découlent. On en déduit que, si $v_n \in [1;\sqrt{2}]$, $v_n \leqslant v_{n+1}$ mais $v_{n+1} \geqslant v_{n+2}$, et sinon les inégalités sont inversées. Dans les deux cas, la suite ne peut pas être monotone.
7. Calculons $2v_n(v_{n+1} - \sqrt{2}) = v_n\left(v_n + \frac{2}{v_n} - 2\sqrt{2}\right) = v_n^2 - 2\sqrt{2}v_n + 2 = (v_n - \sqrt{2})^2$. Comme $v_n \in [1;2]$, $|2v_n| \geqslant 2$, et $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant 1$. On en déduit que $|v_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|v_n-\sqrt{2}||v_n-\sqrt{2}|}{|2v_n|} \leqslant \frac{|v_n-\sqrt{2}|}{2}$.
8. On le prouve par récurrence. Pour $n = 0$, c'est évident puisqu'on a la même chose à gauche et à droite. Supposons l'inégalité vérifiée au rang n, on a alors au rang $n+1$ en utilisant la question précédente $|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|v_n - \sqrt{2}|$, ce qui achève la récurrence.
9. D'après le théorème des gendarmes et le résultat précédent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n - \sqrt{2}| = 0$, ce qui signifie exactement que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}$.

Troisième partie :

1. Manifestement, c'est v_3 qui fait la course en tête.
2. On a $u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n+2q_n}{p_n+q_n} = 1 + \frac{q_n}{p_n+q_n} = 1 + \frac{1}{\frac{p_n}{q_n}+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} = \frac{u_n+2}{u_n+1}$. On a donc $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n + 2 - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}}{u_n+1} = \frac{(1-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})}{u_n+1}$.
3. Nous avons $t_{n+1} = \frac{v_{n+1}-\sqrt{2}}{u_{n+1}-\sqrt{2}} = \frac{(v_n-\sqrt{2})^2}{2v_n}\frac{u_n+1}{(1-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})} = \frac{(v_n-\sqrt{2})(u_n+1)}{2v_n(1-\sqrt{2})}t_n$.
4. Parmi les termes de l'affreux quotient de la question précédente, on a $v_n - \sqrt{2}$ qui a pour limite 0, et tous les autres ont une limite finie (non nulle), donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n} = 0$.
5. De la question précédente, on déduit qu'à partir d'un certain rang n_0, $\left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ (on pourrait prendre autre chose que $\frac{1}{2}$, peu importe), donc $\forall n > n_0$ $|t_n| \leqslant \frac{1}{2}|t_{n-1}| \leqslant \frac{1}{4}|t_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n-n_0}}|t_{n_0}|$ (on fait une jolie récurrence si on veut être rigoureux). Par théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|t_n| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.
6. Cela signifie que $v_n - \sqrt{2}$ est négligeable par rapport à $u_n - \sqrt{2}$, donc que la suite (v_n) converge vers $\sqrt{2}$ beaucoup plus rapidement que la suite (u_n).