Devoir Surveillé n°3

ECE3 Lycée Carnot

1er décembre 2009

Durée : 4H. Calculatrices autorisées (pour une fois).

Dans les deux exercices de dénombrement, chaque calcul doit être accompagné d'une justification soigneuse. Sauf mention explicite dans l'énoncé de la question, on ne demande pas de valeur numérique pour les réponses.

Exercice 1

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, (et donc constitué de $n \times p$ cases), parmi lesquelles un certain nombre sont noircies (et les autres blanches). Dans un premier temps, on s'intéresse à des grilles à 6×4 cases (6 lignes et 4 colonnes donc, et 24 cases au total), contenant exactement 4 cases noires.

1. Combien y a-t-il de telles grilles différentes ?
2. Combien ont exactement un coin noirci ?
3. Combien ont exactement une case noircie sur chaque colonne ?
4. Combien ont au moins une case noire sur la première ligne ?
5. Combien ont leurs quatre cases noires sur quatre lignes différentes ?
6. Combien ont leurs cases noires sur quatre lignes et quatre colonnes différentes (donner la valeur numérique) ?

On se place maintenant dans le cas général : n lignes, p colonnes et k cases noires, avec $k \leqslant np$.

1. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien ont les quatre coins noirs ?
3. Combien ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question $n = p = k$. Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?
6. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge (pour ceux qui ne maitrisent pas les règles du Sudoko : il s'agit d'une grille à neuf lignes et neuf colonnes, et il doit y avoir un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne ; de plus, si on découpe la grille en neuf petites grilles de neuf cases en regroupant lignes et colonnes trois par trois, il doit y avoir un 1 exactement dans chacune de ces petites grilles).
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Soduko (donner la valeur numérique pour chacun des deux).

Exercice 2

On considère dans tout cet exercice un ensemble fini E de cardinal n, et on va chercher à dénombrer l'ensemble de ses partitions vérifiant certaines propriétés. Rappelons qu'une partition de E est un découpage de E en sous-ensembles disjoints non vides, dont la réunion est égale à E tout entier. Les questions de l'exercice sont largement indépendantes.

1. Déterminer « à la main » le nombre de partitions de l'ensemble à un élément $E_1 = \{1\}$, puis de l'ensemble à deux éléments $E_2 = \{1;2\}$, et enfin de l'ensemble à trois éléments $E_3 = \{1;2;3\}$ (l'ordre dans lequel apparaissent les sous-ensembles dans la partition n'est pas important).
2. Dans le cas général, déterminer le nombre de partitions de E constituées de n sous-ensembles, puis celles constituées de $n-1$ sous-ensembles.
3. Dans le cas où $|E| = 10$ (on prendra par exemple $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$), déterminer le nombre de partitions de E en 8 sous-ensembles (on pourra considérer deux types de partitions).
4. Généraliser le résultat précédent en déterminant le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en $n-2$ sous-ensembles (pour $n \geqslant 3$).
5. On cherche dans cette question à déterminer le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles.
   (a) On suppose dans cette question que le premier sous-ensemble contient un seul élément (donc le deuxième en contient $n-1$). Compter le nombre de telles partitions.
   (b) Déterminer le nombre de partitions pour lesquelles l'un des deux ensembles contient 2 éléments, et l'autre $n-2$.
   (c) En déduire une formule générale pour le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments, puis pour le nombre total de partitions de E en deux sous-ensembles. Calculer ce nombre.
6. (a) Calculer « à la main » a_1, a_2 et a_3 (pour a_3, on pourra se contenter d'une bonne explication plutôt que de faire une liste complète).
   (b) Démontrer que, $\forall p \geqslant 2$, $a_p = (2p-1)a_{p-1}$.
   (c) Écrire un programme Pascal calculant la valeur de a_p, pour un entier p choisi par l'utilisateur.
   (d) Déterminer une formule explicite pour a_p faisant intervenir un quotient de factorielles.
   (e) En déduire de combien de façons on peut former 10 couples dans un groupe de 20 personnes (couples homosexuels autorisés !). Comparer au nombre de façon de former dix couples hétérosexuels avec 10 garçons et 10 filles.

Problème : algorithme de Babylone et fractions continues

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés de certaines suites convergeant vers $\sqrt{2}$. Dans les deux premières parties, on introduit deux suites différentes ayant cette limite, et dans la troisième partie, on cherche à comparer la rapidité de leur convergence vers $\sqrt{2}$.

Première partie :

On définit dans cette partie les deux suites (p_n) et (q_n) par $p_0 = q_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. On pose enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

1. Montrer que pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer les valeurs de p_1, q_1, p_2, q_2, p_3 et q_3, et en déduire les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant q_n$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$.
5. Calculer la valeur du terme général de la suite (p_n).
6. Montrer que (q_n) vérifie la même relation de récurrence que (p_n), et calculer également son terme général.
7. En déduire une formule explicite pour u_n, puis la limite de la suite (u_n).

Deuxième partie :

On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3 (donner pour v_3, outre la valeur exacte, une valeur approchée à 10^{-3} près).
2. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [1; 2]$.
3. Étudier les variations de la fonction f (sur son intervalle de définition).
4. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$, en déduire les limites possibles pour la suite (v_n).
5. Étudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
6. Montrer que, si $v_n \in [1; \sqrt{2}]$, alors $v_{n+1} \in [\sqrt{2}; 2[$, et si $v_n \in [\sqrt{2}; 2[$, alors $v_{n+1} \in [1; \sqrt{2}[$. La suite (v_n) est-elle monotone ?
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}$. En déduire que $|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}|$.
8. En utilisant le résultat de la question précédente, prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}|$.
9. En déduire la limite de la suite (v_n).

Troisième partie :

On cherche désormais à comparer la vitesse de convergence des suites (u_n) et (v_n) introduites dans les parties précédentes vers $\sqrt{2}$, et on pose pour cela $t_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

1. Au vu des valeurs de u_3 et v_3 calculées précédemment, quelle semble être la suite qui converge le plus vite ?
2. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n, en déduire que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1}(u_n - \sqrt{2})$.
3. En utilisant les résultats de la question précédente et de la question 7. de la deuxième partie, exprimer t_{n+1} en fonction de t_n, u_n et v_n.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.
6. Que peut-on conclure de ce calcul concernant la rapidité de convergence des deux suites (u_n) et (v_n) ?