Devoir Surveillé n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

20 octobre 2009

Exercice 1 (un peu fourre-tout)

1. Le trinome du numérateur étant toujours positif, on se ramène à l'équation $x^2 - 2x + 4 = |x-1| - 2$ (avec toutefois un domaine de définition où on doit enlever 4 et -2). Ainsi si $x \geqslant 1$, il faut résoudre $x^2 - 3x + 7 = 0$, équation qui n'a pas de solution. Si $x \leqslant 1$, on se ramène à $x^2 - x + 5$, qui n'a pas plus de solution, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. C'est une somme télescopique qui se réduit à $\sqrt{10\,000} - \sqrt{1} = 100 - 1 = 99$.
3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{4}$.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{1+u_n}$.
   (a) Une récurrence vraiment facile suffit (si $u_n \geqslant 0$, alors (u_n) est bien définie).
   (b) En effet $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \frac{3}{2}}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{1 + \frac{2}{1+2u_n} - \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{1+2u_n} + 1} = \dfrac{\frac{2}{1+2u_n} - \frac{1}{2}}{2 + \frac{2}{1+2u_n}} = \dfrac{\frac{3}{2} - u_n}{4 + 2u_n} = -\dfrac{1}{4} w_n$.
   (c) Comme $w_0 = -\dfrac{3}{2}$, on obtient $w_n = -\dfrac{3}{2 \times (-4)^n}$, puis après un petit calcul $u_n = \dfrac{w_n + \frac{3}{2}}{1 - w_n}$ (expression qu'on n'a pas trop envie d'essayer de simplifier).
   (d) La limite de w_n étant nulle (suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$), celle de u_n vaut $\dfrac{3}{2}$.

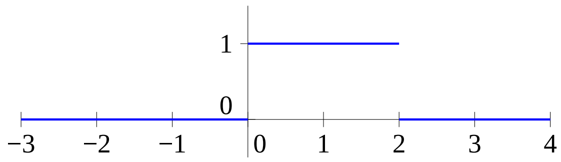
Exercice 2

1. Dire que (u_n) est bien définie revient de fait à prouver que u_n est toujours strictement supérieur à 1, ce qui se fait par récurrence : notons $P_n : u_n > 1$. P_0 est vraie par hypothèse, et si on suppose $u_n > 1$, alors $u_n - 1 > 0$, donc $\sqrt{u_n - 1} > 0$ et $u_{n+1} > 1$, ce qui prouve $P_{n+1} > 1$ et achève la récurrence.
2. C'est une conséquence immédiate de la question précédente.

3. On a $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \dfrac{1}{2}v_n$, donc (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
4. Comme $v_0 = \ln 2$, $v_n = \dfrac{\ln 2}{2^n}$, et $u_n = e^{v_n} + 1 = 2^{\frac{1}{2^n}} + 1$.
5. La limite de $\dfrac{1}{2^n}$ valant 0, celle de $2^{\frac{1}{2^n}}$ vaut 1 et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercice 3

1. La fonction f_A vaut 1 sur l'intervalle $[0; 2]$ et 0 le reste du temps :



2. La fonction n'est certainement pas injective puisque par exemple $f(-4) = f(35) = 0$. Elle est par contre surjective puisque 0 et 1 ont tous les deux des antécedents par f_A.
3. La fonction n'est pas surjective dans deux cas : si elle est tout le temps nulle, ce qui est le cas pour $A = \emptyset$, ou si elle est tout le temps égale à 1, ce qui est le cas pour $A = \mathbb{R}$.
4. La fonction $f_A \cup B$ vaut 1 sur l'intervalle $[0; 4]$ et elle est nulle le reste du temps; la fonction $f_A \cap B$ vaut 1 sur l'intervalle $[1; 2]$ et elle est nulle le reste du temps.
5. Si $x \in A \cap B$, on a $x \in A$ et $x \in B$, donc $f_A(x) = f_B(x) = 1$, et $f_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \times 1$ donc l'égalité est vérifiée. Sinon, il y a au moins l'une des deux valeurs de $f_A(x)$ et $f_B(x)$ qui est nulle, et leur produit est donc nul, ce qui correspon bien à la valeur de $f_{A\cap B}(x)$.

   Pour l'union, supposons d'abord que x n'appartienne ni à A ni à B. L'égalité demandée s'écrit alors $0 = 0 + 0 - 0 \times 0$, ce qui est vrai. À l'opposé, si x appartient aux deux ensembles, $1 = 1 + 1 - 1 \times 1$ est également vrai. Supposons enfin que x appartienne à A mais pas à B (le dernier cas est symétrique), alors $x \in A \cup B$, et $1 = 1 + 0 - 1 \times 0$ reste vrai. dans tous les cas, l'égalité demandée est vérifiée.
6. Si $x \in A$, alors $x \notin \bar{A}$, et $f_{\bar{A}}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - f_A(x)$. De même, si $x \notin A$, alors $f_{\bar{A}}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - f_A(x)$.

Exercice 4

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$, et les relations de récurrence suivantes : $\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + \sqrt{2}v_n \\ v_{n+1} & = & \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n \\ w_{n+1} & = & \sqrt{2}v_n + w_n \end{cases}$

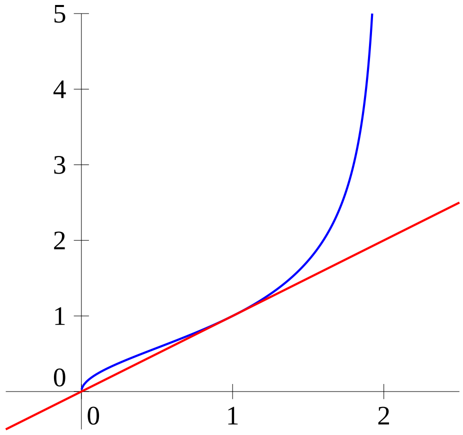
1. On a $d_{n+1} = u_{n+1} - w_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n - \sqrt{v_n} - w_n = u_n - w_n$, donc la suite est effectivement constante. elle est donc égale à son premier terme $d_0 = 1 - 0 = 1$.
2. Toujours en utilisant l'énoncé, $s_{n+1} = u_{n+1} + w_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n + \sqrt{2}v_n + u_n = s_n + 2\sqrt{2}v_n$.
3. $v_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} + v_{n+1} + \sqrt{2}w_{n+1} = \sqrt{2}s_{n+1} + v_{n+1}$.
4. En combinant les deux calculs, on obtient $v_{n+2} = \sqrt{2}(s_n + 2\sqrt{2}v_n) + v_{n+1} = \sqrt{2}s_n + 4v_n + v_{n+1}$. Or, en décalant la relation de la question précédente, on a $v_{n+1} = \sqrt{2}s_n + v_n$, ou encore $\sqrt{2}s_n = v_{n+1} - v_n$. En remplaçant dans l'égalité précédente, cela donne $v_{n+2} = v_{n+1} - v_n + 4v_n + v_{n+1} = 2v_{n+1} + 3v_n$.
5. La suite (v_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et pour racines réelles $r = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$. le terme général de (v_n) peut donc s'écrire sous la forme $v_n = \alpha 3^n + \beta(-1)^n$, avec $v_0 = \alpha + \beta = 0$, et $v_1 = 3\alpha - \beta = \sqrt{2}$. On a donc $\beta = -\alpha$ et $4\alpha = \sqrt{2}$, soit $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, puis $v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(3^n - (-1)^n)$.
6. Comme $s_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(v_{n+1} - v_n)$, on obtient $s_n = \dfrac{1}{4}(3^{n+1} - (-1)^{n+1}) - 3^n + (-1)^n) = \dfrac{1}{4}(3 \times 3^n - 3^n + 2 \times (-1)^n) = \dfrac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$. Réutilisons désormais que $u_n - w_n = 1$, donc $s_n = u_n + w_n = 2u_n - 1$, ou encore $u_n = \dfrac{1}{2}(s_n + 1) = \dfrac{1}{4}(3^n + (-1)^n) + \dfrac{1}{2}$, puis $w_n = \dfrac{1}{4}(3^n + (-1)^n) - \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5

1. La fonction f est définie lorsque $\dfrac{x}{2-x} \geqslant 0$, et $x - 2 \neq 0$. Un petit tableau de signe nous donne $\mathcal{D}_f = [0; 2[$.
2. En posant $u(x) = \dfrac{x}{2-x}$, la dérivée de f sera de la forme $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, et donc du même signe que u'. Contentons nous donc de calculer cette dernière : $u'(x) = \dfrac{2-x+x}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{(2-x)^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur son ensemble de définition.

La seule limite à calculer est est $\lim_{x \to 2} f(x)$ (de l'autre côté, f est définie en 0, et $f(0) = 0$). Le numérateur de la fraction tend alors vers 2 et le dénominateur vers 0^+, donc le quotient vers $+\infty$. Le fait d'ajouter une racine carrée ne change rien, et $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

3. Sur $[0; 2[$, les deux membres étant positifs, $f(x) \geqslant x \Rightarrow \dfrac{x}{2-x} \geqslant x^2$, soit $x \geqslant 2x^2 - x^3$ (puisque $2 - x$ est toujours positif), ou encore $x(1 - 2x + x^2) \geqslant 0$, soit $x(1-x)^2 \geqslant 0$. Cette inégalité étant toujours vérifiée, on a bien $f(x) \geqslant x$ sur $\mathcal{D}_f$, avec égalité pour $x = 0$ et $x = 1$.
4. Comme $f(1) = 1$ et $f'(1) = \dfrac{u'(1)}{2\sqrt{u(1)}} = \dfrac{2}{2} = 1$, l'équation de la tangente demandée est $y = x$.
5. Voici la courbe ainsi que la tangente :



6. La fonction étant strictement croissante, elle est injective. De plus, au vu du calcul de limite et de la valeur prise par f en 0, on a $f([0; 2[) = [0; +\infty[$, donc f effectue bien une bijection de $[0; 2[$ sur $[0; +\infty[$.
7. Il suffit de résoudre l'équation $\sqrt{\dfrac{x}{2-x}} = y \Rightarrow \dfrac{x}{2-x} = y^2 \to x = 2y^2 - xy^2 \Rightarrow x(1+y^2) = 2y^2 \Rightarrow x = \dfrac{2y^2}{1+y^2}$. On déduit de ce calcul que $f^{-1}(y) = \dfrac{2y^2}{1+y^2}$ (notons que f^{-1} n'est définie que sur $[0; +\infty[$, sinon la première équivalence du calcul précédent est grossièrement fausse).
8. C'est une récurrence toute bête : $u_0 \in [0; 1]$ par hypothèse, et si $u_n \in [0; 1]$, on sait d'après le tableau de variations de f que $f(u_n) \in [0; 1]$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \in [0; 1]$, ce qui achève la récurrence.
9. Une conséquence immédiate du fait que $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) \geqslant x$, est que $u_{n+1} \geqslant u_n$, c'est-à-dire que la suite est croissante.
10. La suite est croissante et majorée par 1, elle converge donc. Utilisons l'indice : $f(x) = x$ a déjà été résolue plus haut, on a deux solutions qui sont 0 et 1. La limite de (u_n) ne pouvant être 0 (la suite est croissante et $u_0 > 0$), on a donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.