# Devoir Surveillé n°2

ECE3 Lycée Carnot

20 octobre 2009

Durée : 3H. Calculatrices interdites.

## Exercice 1 (un peu fourre-tout)

1. Résoudre l'équation $\dfrac{|x^2-2x+4|}{|x-1|-3}=1$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=9\ 999}\sqrt{i+1}-\sqrt{i}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1}$.
4. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1+\dfrac{2}{1+u_n}$.
   (a) Montrer que $(u_n)$ est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$.
   (b) On pose $w_n=\dfrac{u_n-\frac{3}{2}}{u_n+1}$. Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique.
   (c) En déduire l'expression de $w_n$ puis celle de $u_n$.
   (d) Quelle est la limite de $(u_n)$ ?

## Exercice 2

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n-1}+1$.

1. Montrer que $(u_n)$ est bien définie et que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>1$
2. On introduit une suite auxiliaire $(v_n)$ définie par $v_n=\ln(u_n-1)$. Montrer que $(v_n)$ est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite $(v_n)$.
4. En déduire l'expression de $v_n$ puis celle de $u_n$.
5. Déterminer la limite de $(u_n)$.

## Exercice 3

Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note fonction indicatrice de l'ensemble $A$ l'application $f_A$ : $A\to\{0;1\}$ définie de la façon suivante : $f(x)=1$ si $x\in A$, et $f(x)=0$ si $x\notin A$.

1. Dessiner le graphe de la fonction $f_A$ si $A=[0;2]$.
2. La fonction précédente est-elle injective ? Surjective ?
3. Pour quels ensembles $A$ la fonction $f_A$ ne sera-t-elle pas surjective ?

4. On a toujours $A = [0;2]$ et on pose désormais $B = [1;4]$. À quoi ressemblent les fonctions indicatrices de $A \cap B$ et de $A \cup B$ ?
5. Démontrer qu'en général, on a toujours $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \times f_B(x)$ et $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \times f_B(x)$.
6. Montrer que, pour tout ensemble $A$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$.

## Exercice 4

On considère trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$, et les relations de récurrence suivantes : $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + \sqrt{2}v_n \\ v_{n+1} & = & \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n \\ w_{n+1} & = & \sqrt{2}v_n + w_n \end{array}\right.$

1. On définit une première suite auxiliaire $d_n = u_n - w_n$. Montrer que $d_n$ est constante et calculer sa valeur.
2. On définit une deuxième suite auxiliaire $s_n = u_n + w_n$. Exprimer $s_{n+1}$ en fonction de $s_n$ et $v_n$.
3. Exprimer $v_{n+2}$ en fonction de $v_{n+1}$ et de $s_{n+1}$.
4. Déduire des deux question précédentes que $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$.
5. Calculer le terme général de la suite $(v_n)$.
6. En déduire la valeur de $s_n$, puis celles de $u_n$ et de $w_n$.

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Étudier les variations de $f$, ainsi que ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Démontrer que, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \geqslant x$. Quand a-t-on égalité ?
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction $f$, en son point d'abscisse 1.
5. Tracer le plus soigneusement possible la courbe $\mathcal{C}$ en tenant compte de toutes les informations précédentes.
6. Montrer que $f$ est bijective de $[0;2[$ sur $[0;+\infty[$.
7. Déterminer une équation explicite pour sa bijection réciproque $f^{-1}$.
8. On considère désormais la suite $(u_n)$ définie par $u_0 \in ]0;1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
9. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)$.
10. En déduire la convergence de $(u_n)$ et sa limite $l$ (en utilisant que $f(l) = l$).