Devoir Surveillé n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

30 septembre 2009

Exercice 1

1. On pose $X = \sqrt{x}$ (naturellement, x devra être positif pour que l'inéquation ait en sens). L'inéquation devient $X^2 - 3X - 2 \leqslant 0$, le discriminant du trinome est $\Delta = 8 + 8 = 17$, il y a donc deux racines $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$. La première racine étant négative, on obtient comme condition $\sqrt{x} \leqslant x_2$, soit $x \leqslant x_2^2 = \dfrac{25 + 6\sqrt{25}}{4}$, donc $\mathcal{S} = \left[0; \dfrac{25 + 6\sqrt{17}}{4}\right]$.
2. Commençons par signaler que l'équation n'a un sens que si $x \geqslant 3$ et $x \geqslant -1$, soit sur $[3; +\infty[$. En regroupant les ln, on obtient $\ln((x-3)(x+1)) = \ln 8$, soit en passant à l'exponentielle $(x-3)(x+1) = 8$, puis $x^2 - 2x - 11 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 4 + 44 = 48$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{48}}{2} = \dfrac{2 + 4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$, et $x_2 = \dfrac{2 - 4\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sqrt{3}$. Seule la première est supérieure à 3, donc $\mathcal{S} = \{1 + 2\sqrt{3}\}$.
3. Un petit tableau sera nécessaire pour enlever les valeurs absolues :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$\lvert 3x+1 \rvert$		$-3x-1$	0	$3x+1$		$3x+1$	
$\lvert 2x-4 \rvert$		$-2x+4$		$-2x+4$	0	$2x-4$	
$\lvert 3x+1 \rvert + \lvert 2x-4 \rvert$		$-5x+3$		$x+5$		$5x-3$	

   On résout l'équation sur chaque intervalle : $-5x + 3 = 5$ donne $x = -\dfrac{2}{5}$, qui est dans le bon intervalle ; $x + 5 = 5$ donne $x = 0$ qui est aussi dans le bon intervalle ; et enfin $5x - 3 = 5$ donne $x = \dfrac{8}{5}$, qui lui n'est pas une solution valable, donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{2}{5}; 0\right\}$.

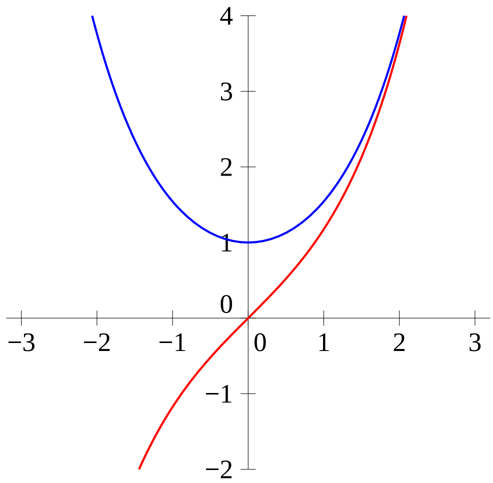
Exercice 2

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$. Cette somme est constituée de $n + 1$ termes.
2. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3+12k^2+6k+1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3+12\sum_{k=0}^{k=n} k^2+6\sum_{k=0}^{k=n} k+\sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)+n+1 = (n+1)(2n^2(n+1)+2n(2n+1)+3n+1) = (n+1)(2n^3+6n^2+5n+1)$.
3. $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k\leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k\leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 = T_n + S_n$.
4. On a $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \dfrac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^3+2n^2+4n^2+4n+n+1 = 2n^3+6n^2+5n+1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Pour $n = 0$, on obtient $P_0 : \sum_{k=0}^{k=0}(2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=0}^{k=n+1}(2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Problème

1. On a $sh(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x}$, ce qui donne en prenant les logarithmes, $x = -x$, soit $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
2. $\mathcal{D}_{sh} = \mathcal{D}_{ch} = \mathbb{R}$ (puisque la fonction exponentielle est définie partout) ; et d'après la question précédente, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
3. Calculons $ch(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = ch(x)$, donc ch est paire, et $sh(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^x}{2} = -sh(x)$ donc sh est impaire. Quant à f, c'est le quotient de deux fonction impaires, elle est donc paire (on peut refaire le calcul si on veut).
4. Calculons donc : $sh'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$. Cette dérivée est toujours positive (c'est une somme de deux exponentielles), donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle s'annule en 0, elle est donc négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$. Passons à la deuxième fonction : $ch'(x) = \dfrac{e^x + (-e^{-x})}{2} = sh(x)$. D'après la remarque que nous venons de faire, ch est donc décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

5. Encore un petit calcul : $ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$, donc on a bien $ch(x) > sh(x)$.
6. La tangente à ch en -2 a pour équation $y = sh(-2)(x+2) + ch(-2) = \frac{e^{-2} - e^2}{2}(x+2) + \frac{e^{-2} + e^2}{2} = \frac{e^{-2} - e^2}{2}x + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^2 \simeq -3,65x - 3,55$. Pour sh, on a l'équation suivante : $y = \frac{e^{-2} + e^2}{2}(x+2) + \frac{e^{-2} - e^2}{2} = \frac{e^{-2} + e^2}{2}x + \frac{3}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 \simeq 3,75x + 3,85$.
7. En utilisant les limites de l'exponentielle en $\pm\infty$, on obtient sans difficulté $\lim_{x \to -\infty} ch(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} sh(x) = +\infty$.
8. Voici les deux courbes demandées :



9. C'est un calcul de dérivée de quotient tout simple, à tel point qu'il est difficile de le détailler.
10. On a $g'(x) = ch(x) - ch(x) - x\,sh(x) = -x\,sh(x)$. On a vu un peu plus haut que $sh(x)$ est toujours du même signe que x, donc $x\,sh(x)$ est toujours positif, et $g'(x)$ est toujours négatif. Autrement dit, g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
11. Comme on a par ailleurs $g(0) = 0 - 0 = 0$, on peut en déduire que f', qui est du même signe que g, est positive sur $]-\infty; 0[$, et négative sur $]0; +\infty[$. Si on tient absolument à compléter le tableau de variations, on peut prouver que f a pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ par croissance comparée. Pour ce qui se passe en 0, c'est l'objet de la dernière question ci-dessous.
12. Oui, mais ce n'est pas si facile à calculer ! Une astuce est d'écrire que $\frac{1}{f(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{e^x - 1}{2x} - \frac{e^{-x} - 1}{2x}$. La première moitié a pour limite $\frac{1}{2}$ (je rappelle que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, c'est une des limites classiques vues en cours). La deuxième moitié tend aussi vers $\frac{1}{2}$ pour la même raison (il suffit de remplacer x par $-x$, qui tend tout autant vers 0), donc on a en fait $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.