Devoir Surveillé n°10 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 juin 2010

Exercice 1 (EM Lyon 2004)

1. Si $AM = M$, une simple multiplication à gauche par A donne $A^2M = AM$, d'où $E_A \subset F_A$. Si A est inversible, on peut multiplier l'égalité $A^2M = AM$ à gauche par A^{-1} pour obtenir $AM = M$, les deux égalités sont donc équivalentes et $E_A = F_A$.
2. Si $A - I$ est inversible, on a $AM = M \Leftrightarrow (A - I)M = 0 \Leftrightarrow M = 0$.
3. Comme B et $B - I$ sont inversibles (elle sont triangulaires supérieures sans 0 sur la diagonale), en exploitant les questions précédentes, $F_B = E_B = \{0\}$.
4. (a) Appliquons donc un petit pivot de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On calcule $P^{-1}C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) En effet, $P^{-1}M \in E_D \Leftrightarrow DP^{-1}M = P^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}CPP^{-1}M = P^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}CM = P^{-1}M \Leftrightarrow CM = M$ (en multipliant par P à gauche pour la dernière équation).

(d) Posons $N = P^{-1}M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a alors $DN = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
On aura donc $DN = N$ si $a = b = c = d = e = f = 0$, les trois derniers coefficients de la matrice étant quelconques.

(e) Il suffit de constater que $M = PN = \begin{pmatrix} g & h & i \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Cours : $Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$; $E(Z) = 2$ et $V(Z) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.

2. (a) Si $i > k$, on aura toujours $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$. Sinon, $\forall k \geqslant 1$, $\forall i \in \{1; \dots ; k\}$, $P((Z = k) \cap (X = i)) = P(Z = k) \times P_{Z=k}(X = i) = \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{k}$.

   (b) C'est une simple application de la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(Z = k)$ (la somme débute à $k = i$ puisque la probabilité de l'intersection est nulle si $k < i$).

   (c) On a $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$ (ce qui est normal).

3. (a) En effet, $iP(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k2^k} \leqslant \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ (puisque toutes les valeurs que prend l'indice k sont plus grandes que i), soit $iP(X = i) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{i-1}}$. La série de terme général $iP(X = i)$ est à termes positifs et majorée par une série géométrique convergente, elle converge donc, ce qui signifie que X admet une espérance.

(b) On a $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{i}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{2k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) = \frac{3}{2}$.

4. (a) En reprenant les questions précédentes, $i^2 P(X = i) \leqslant \frac{i}{2^{i-1}}$, qui est le terme général d'une série convergente, donc X^2 admet une espérance, et $E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{i^2}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k2^k}$, d'où la formule demandée.

   (b) On a $(k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1$, et $ak(k-1) + bk + c = ak^2 + (b-a)k + c$, par identification on obtient $a = 2$, $b = 5$ et $c = 1$.

   (c) Il s'ensuit que $E(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k(k-1) + 5k + 1}{2^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} + \frac{5}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{6} + \frac{10}{6} + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Via König-Huygens, on a donc $V(X) = \frac{19}{6} - \frac{9}{4} = \frac{38-27}{12} = \frac{11}{12}$.

5. (a) En effet, $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{kx^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.

   (b) En intégrant l'équation précédente entre 0 et $\frac{1}{2}$, on obtient $f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f_n(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x}$. Or, $f_n(0) = 0$, donc $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx$. La première intégrale se calcule, elle est égale à $[-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2$, d'où la formule demandée.

   (c) La fonction sous l'intégrale étant positive, l'intégrale est bien positive. De plus, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $x^n \leqslant \frac{1}{2^n}$, et $\frac{1}{2} \leqslant 1 - x \leqslant 1$, donc $\frac{1}{1-x} \leqslant 2$, d'où en intégrant tout ça $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2^n}dx = \frac{1}{2^n}$. Une application évidente du théorème des gendarmes donne donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx = 0$.

(d) En passant à la limite dans la formule obtenue à la question 2, on a alors $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k2^k} = \ln 2$. Or, cette somme est justement égale à $P(X=1)$, d'où le résultat final.