Devoir Surveillé n°10

ECE3 Lycée Carnot

4 juin 2010

Durée : 2H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (EM Lyon 2004)

On se place dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $E_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\}$, et $F_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}$.

1. Montrer qu'on a toujours $E_A \subset F_A$, et que, dans le cas où A est inversible, $E_A = F_A$.
2. Montrer que, si $A - I$ est inversible, $E_A = \{0\}$.
3. On pose $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer E_B et F_B.
4. On pose désormais $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer $P^{-1}CP$ (on notera désormais $D = P^{-1}CP$).
   (c) Montrer que $M \in E_C \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_D$.
   (d) Déterminer l'ensemble E_D.
   (e) En déduire E_C.

Exercice 2

On effectue une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un premier Pile. On note Z le nombre de lancers ainsi effectués, puis si ce nombre de lancers a été égal à k, on remplit une urne de k boules numérotées de 1 à k, on tire une boule au hasard dans cette urne et on note X le numéro de la boule tirée. Dans le cas (extrêmement improbable) où on n'obtient jamais Pile lors de la série de lancers de la pièce, on considère que $X = 0$.

1. Rappeler la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.
2. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (Z, X) (en précisant clairement les valeurs pour lesquelles $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$).

   (b) En déduire que, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

   (c) En admettant la formule $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} a_{i,k}$ (où $a_{i,k}$ est une expression pouvant dépendre des deux indices i et k), calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)$.
3. (a) Montrer que, $\forall i \geqslant 1$, $iP(X = i) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, et en déduire que X admet une espérance.

   (b) En utilisant la même formule d'inversion des sommes qu'à la question 2.c), calculer $E(X)$.
4. (a) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que X^2 admet un moment d'ordre 2 et que $E(X^2) = \displaystyle\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)(2k+1)}{2^k}$.

   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 1$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

   (c) En déduire la valeur de $E(X^2)$, puis calculer $V(X)$.
5. On note dans cette question $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k}$.

   (a) Montrer que $\forall x \in [0; 1[$ $f_n'(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$.

   (b) En déduire que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

   (c) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leqslant \frac{1}{2^n}$, et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

   (d) Déduire des calculs précédents que $P(X = 1) = \ln 2$.