Devoir Surveillé n°1

ECE3 Lycée Carnot

30 septembre 2009

Durée : 2H. Calculatrices interdites

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x - 3\sqrt{x} \leqslant 2$
2. $\ln(x-3) + \ln(x+1) = 3\ln 2$
3. $|3x+1| + |2x-4| = 5$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Problème

On définit deux fonctions notées ch (pour **c**osinus **h**yperbolique) et sh (pour **s**inus **h**yperbolique) de la façon suivante : $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. On note également $f(x) = \dfrac{x}{sh(x)}$.

1. Résoudre l'équations $sh(x) = 0$.
2. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces trois fonctions.
3. Déterminer la parité de chacune de ces trois fonctions.
4. À l'aide d'un calcul de dérivée, déterminer les variations de la fonction sh, puis celles de la fonction ch.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) > sh(x)$.
6. Calculer l'équation de la tangente à chacune des deux courbes en leur point d'équation $x = -2$ (garder les valeurs exactes, puis donner des valeurs approchées des coefficients directeurs, sachant que $e^2 \simeq 7,4$ et $e^{-2} \simeq 0,1$.
7. Déterminer les limites de ch et sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
8. Tracer dans un même repère les représentations graphiques des fonctions sh et ch.
9. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{sh(x) - x\,ch(x)}{(sh(x))^2}$.
10. Étudier les variations de $g : x \mapsto sh(x) - x\,ch(x)$.
11. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
12. La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?